# Reordenación de series en espacios de dimensión infinita. El teorema de Levy-Steinitz.

**José Bonet**

Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada

Universidad Politécnica de Valencia

**Primera Reunión Conjunta RSME-SMM. Julio de 2009**

- Reordenación de series.

- Fenómeno sorprendente en análisis matemático: Las sumas infinitas de números no cumplen la propiedad conmutativa.

- **Serie** $\sum a_k$.
  Sucesión de números reales $a_1, a_2, ..., a_k, ...$, llamados términos de la serie, a los que pretendemos asociar una **suma**.
- **Idea de Cauchy**.
- **Sumas parciales**
  $s_1 := a_1$, $s_2 := a_1 + a_2$,..., $s_k := a_1 + a_2 + ... + a_k$.
- **La serie converge** si existe $\lim s_k = s$ y al límite se le llama **suma** de la serie $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
- $\sum x^k = 1 + x + x^2 + ...$ converge si y sólo si $|x| < 1$.
  Su suma es $\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.

**Aspectos a estudiar acerca de las series.**

(1) **Convergencia.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \pi^2/6$ (**Euler**).

(2) **Comportamiento asintótico.**
La serie armónica $\sum \frac{1}{k}$ diverge (**Euler**). Sus sumas parciales $s_k$ se comportan asintóticamente como $\log k$. O sea

$$\lim_{k \to \infty} \frac{s_k}{\log k} = 1.$$

Euler también demostró que la serie $\sum \frac{1}{p}$, la suma extendida a los números primos $p$ diverge.

(3) Un aspecto exclusivo de series es la **reordenación**.

# Reordenación de series

- Una **reordenación** de la serie $\sum a_k$ es la serie $\sum a_{\pi(k)}$, donde

  $$\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

  es una biyección.

- Una serie $\sum a_k$ es **incondicionalmente convergente** si la serie $\sum a_{\pi(k)}$ converge para cada biyección $\pi$.

- Si la serie $\sum a_k$ converge, se llama el **conjunto de sumas** a

  $$S(\sum a_k) := \{x \in \mathbb{R} \mid x = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)} \quad \text{para} \quad \text{cierta} \quad \pi\}$$

  Es el conjunto de sumas de todas las posibles reordenaciones de la serie.

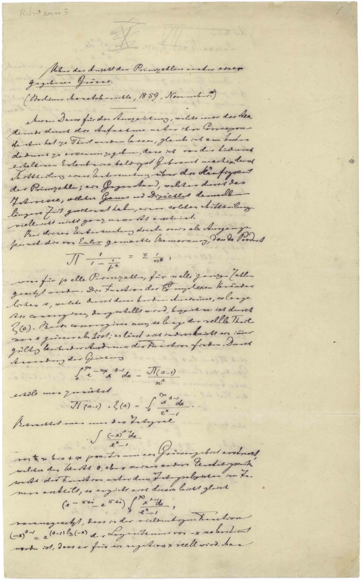
# El Teorema de Riemann

**Teorema (Riemann, 1857)**

Sea $\sum a_k$ una serie de números reales.

- $\sum a_k$ es incondicionalmente convergente si y sólo si $\sum |a_k|$ es convergente, o sea la serie es **absolutamente convergente**.
- Si $\sum a_k$ converge, pero no incondicionalmente, entonces

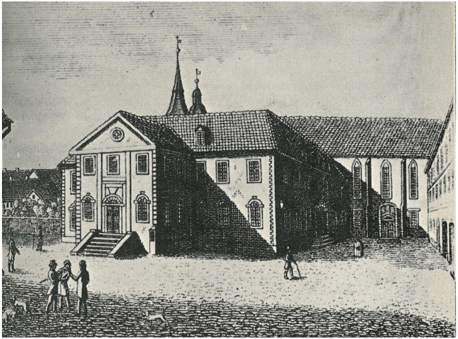
$$S(\sum a_k) = \mathbb{R}.$$


Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.

(Berliner Monatsberichte, 1859, November.)

**Riemann (1826-1866)**. La integral de Riemann, las superficies de Riemann, la ecuación de Cauchy Riemann, el teorema de Riemann Lebesgue, el teorema de la función de Riemann en variable compleja, la función zeta de Riemann,...

El centro mundial de las Matemáticas entre 1800 y 1933 fue **Göttingen (Alemania)**.



Allí estuvieron Gauss, Dirichlet, Riemann, Hilbert y Klein.

# El teorema de Riemann

**Idea de la demostración:**
Si $\sum a_k$ converge absolutamente, el criterio de Cauchy asegura que toda reordenación converge a la misma suma.

Supongamos que $\sum a_k$ converge pero no absolutamente. Sean $p_k$ y $q_k$ los términos positivos y negativos de la serie respectivamente. Casos posibles:

- $\sum p_k$ converge, $\sum q_k$ converge, entonces $\sum |a_k|$ converge.
- $\sum p_k = \infty$, $\sum q_k$ converge, entonces $\sum a_k = \infty$.
- $\sum p_k$ converge, $\sum q_k = -\infty$, entonces $\sum a_k = -\infty$.

Luego, $\sum p_k = \infty$ y $\sum q_k = -\infty$.

Fijamos $\alpha \in \mathbb{R}$, y elegimos el primer $n(1)$ con $p_1 + \dots + p_{n(1)} > \alpha$; ahora el primer $n(2)$ con $p_1 + \dots + p_{n(1)} + q_1 + \dots + q_{n(2)} < \alpha$.
Como $\lim a_k = 0$, el resto de la demostración es $\varepsilon$-$\delta$.

# La serie armónica alternada.

**La serie armónica alternada**

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \log 2.$

El criterio de **Leibniz** muestra la convergencia de la serie. No es absolutamente convergente.

El resultado era conocido por **Mercator (S. XVII)**.

Hay muchas pruebas, por ejemplo por el **teorema de Abel** de series de potencias usando el desarrollo de $\log(1 + x)$.

# La serie armónica alternada.

**Una prueba elemental:** Ponemos $I_n := \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^n x dx$. Se cumple:

(1) $(I_n)_n$ es decreciente.

(2) $I_n = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}$. Integrando por partes.

(3) $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$.

(4) Usando inducción en (2) y que $I_1 = \frac{1}{2}\log 2$, tenemos

$$\frac{1}{4(n+1)} \leq |I_{2n+1}| = |\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} - \frac{1}{2}\log 2| \leq \frac{1}{4n}.$$

Multiplicando por 2 obtenemos el resultado.

# La serie armónica alternada.

## La reordenación de Laurent.

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \ldots =$$

$$= (1 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{4} + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6}) - \frac{1}{8} + (\frac{1}{5} - \frac{1}{10}) - \frac{1}{12} \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \ldots =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots) = \frac{1}{2} \log 2.$$

# La serie armónica alternada.

Una reordenación de la serie armónica alternada se llama **simple** si los términos positivos y negativos separadamente están en el mismo orden que en la serie original. Por ejemplo la reordenación de Laurent es simple.

En una reordenación simple llamamos $p_n$ al número de términos positivos entre los $n$ primeros de la reordenación.

**Teorema de Pringsheim, 1883**

Una reordenación simple $\sum a_{\pi(k)}$ de la serie armónica alternada converge si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n} =: \alpha < \infty$.
En ese caso $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)} = \log 2 + \frac{1}{2}\log(\alpha(1-\alpha)^{-1})$.

En la reordenación de Laurent $\alpha = 1/3$ y

$$\log 2 + \frac{1}{2}\log(\frac{1}{3}\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\log 2.$$

**¿Qué sucede si consideramos series de vectores?**

- Ejemplo en $\mathbb{R}^2$: $\sum((-1)^{k+1}\frac{1}{k}, 0)$.
- El conjunto de sumas es $\mathbb{R} \times \{0\}$. No es todo $\mathbb{R}^2$, pero es un subespacio afín de $\mathbb{R}^2$.
- Fenómeno observado en general por Levy para $n = 2$ en 1905 y por Steinitz para $n \geq 3$ en 1913.

# El teorema de Levy Steinitz. Notación.

- $E$ un espacio localmente convexo **real**.
- **Ejemplos:** $\mathbb{R}^n$, $\ell_p, 1 \leq p \leq \infty$, $L_p, 1 \leq p \leq \infty$ (espacios de Banach), $H(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$ (espacios metrizables completos o de Fréchet), $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $H(K)$, $\mathcal{A}(\Omega)$,...(espacios más complicados).
- $\sum u_k$ es una serie convergente y $S(\sum u_k)$ es su **conjunto de sumas** (de todas las reordenaciones convergentes).
- **Conjunto de los funcionales sumantes**

$$\Gamma(\sum u_k) := \{x' \in E' \mid \sum_1^\infty |\langle x', u_k\rangle| < \infty\} \subset E'.$$

- El **anulador** de $G \subset E'$ es $G^\perp := \{x \in E \mid \langle x, g\rangle = 0 \ \forall g \in G\}$.

# El teorema de Levy Steinitz.

**El Teorema de Levy Steinitz. 1905, 1913.**

Si $\sum u_k$ una serie convergente de vectores de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$S(\sum u_k) = \sum_{1}^{\infty} u_k + \Gamma(\sum u_k)^{\perp}$$

es un subespacio afín de $\mathbb{R}^n$.

P. Rosenthal, en un artículo en el American Mathematical Monthly en 1987 explicando el teorema, comentaba que es un resultado muy bonito, que merece ser más conocido, pero que la dificultad de su prueba es desproporcionada para el enunciado.

# El teorema de Levy Steinitz.

La inclusión "$\subset$" en el enunciado es fácil y se cumple en general:

Sea $x = \sum_1^\infty u_{\pi(k)} \in S(\sum u_k)$.

Queremos ver que $x - \sum_1^\infty u_k \in \Gamma(\sum u_k)^\perp$.

Para ello fijamos $x' \in \Gamma(\sum u_k)$.

Por el teorema de Riemann, tenemos

$$\langle x', x - \sum_1^\infty u_k \rangle = \sum_1^\infty \langle x', u_{\pi(k)} \rangle - \sum_1^\infty \langle x', u_k \rangle = 0,$$

porque la serie $\sum \langle x', u_k \rangle$ es absolutamente convergente.

# El teorema de Levy Steinitz.

**Idea de la prueba de la otra inclusión:** Sea $E$ un espacio metrizable y completo

**(A)**

$S(\sum u_k) \subset S_e(\sum u_k)$.

**Conjunto de sumas expandido**

$$S_e(\sum u_k) := \{x \in E \mid \exists \pi \ \exists (j_m)_m \ : \ x = \lim_{m \to \infty} \sum_1^{j_m} u_{\pi(k)}\}.$$

**(B)**

$S_e(\sum u_k) = \sum_1^\infty u_k + \cap_{m=1}^\infty \overline{Z_m}$.

$$Z_m = Z_m(\sum u_k) := \{\sum_{k \in J} u_k \mid J \subset \{m, m+1, m+2, ...\} \text{ finito}\}.$$

**Idea de la prueba de la otra inclusión. Continuación:**

**(C)**

$$\sum_{1}^{\infty} u_k + \cap_{m=1}^{\infty} \overline{Z_m} \subset \sum_{1}^{\infty} u_k + \cap_{m=1}^{\infty} \overline{\mathrm{co}(Z_m)}.$$

$\mathrm{co}(C)$ es la envoltura convexa de $C$.

**(D)**

$$\sum_{1}^{\infty} u_k + \cap_{m=1}^{\infty} \overline{\mathrm{co}(Z_m)} = \sum_{1}^{\infty} u_k + \Gamma(\sum u_k)^{\perp},$$

por el teorema de Hahn-Banach.

El problema es buscar condiciones para que las inclusiones **(A)** y **(C)** sean igualdades.

# El teorema de Levy Steinitz.

La igualdad en **(A)** se sigue en dimensión finita del siguiente lema.

**Lema del confinamiento poligonal de Steinitz**

Para todo espacio de Banach real $E$ de dimensión finita $m$ existe una constante $0 < C(E) \leq m$ tal que para todo conjunto finito de vectores $x_1, x_2, ..., x_n$ cumpliendo $\sum_1^n x_k = 0$ existe una biyección $\sigma$ de $\{1, 2, ..., n\}$ tal que

$$||\sum_{j=1}^{r} x_{\sigma(j)}|| \leq C(E) \max_{j=1,\ldots n} ||x_j||$$

para todo $r = 1, 2, ...n$.

El valor de la constante $C(E)$ es desconocido incluso para los espacios de Hilbert de dimensión finita $m > 2$. Para $m = 2$, $C(\ell_2^2) = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

# El teorema de Levy Steinitz.

La igualdad en **(C)** se sigue en dimensión finita del siguiente lema.

**Lema del redondeo de los coeficientes.**

Sea $E$ un espacio de Banach real de dimensión finita $m$.

Sea $x_1, x_2, ..., x_n$ un conjunto finito de vectores tales que $||x_j|| \leq 1$ para todo $j = 1, ..., n$.

Para todo $x \in \mathrm{co}(\sum_{k \in I} x_k \mid I \subset \{1, ..., n\})$ existe $J \subset \{1, 2, ..., n\}$ tal que $||x - \sum_{k \in J} x_k|| \leq \frac{m}{2}$.

# El trabajo de Nash-Williams y White

Nash-Williams y White (1999-2001) obtuvieron los siguientes resultados aplicando teoría de grafos: Sea $\pi$ una biyección en $\mathbb{N}$. Definieron la **anchura** $w(\pi)$ de $\pi$ de modo combinatorio con valores en $\mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$.

- $w(\pi) = \infty$ si y sólo si existe una serie $\sum a_k$ de números reales tal que $\sum a_{\pi(k)}$ converge a una suma diferente.
- $w(\pi) = 0$ si y sólo si $\sum a_{\pi(k)}$ converge a la suma de $\sum a_k$ cuando $\sum a_{\pi(k)}$ converge.
- $w(\pi) \in \mathbb{N}$ si y sólo si, para una serie convergente $\sum a_k$, $\sum a_{\pi(k)}$ tiene la misma suma o diverge. En este caso, fijado $\pi$, determinan el conjunto de los puntos de acumulación de las sucesiones de sumas parciales de series de la forma $\sum a_{\pi(k)}$ con $\sum_1^\infty a_k = 0$.
- Extienden sus resultados para series en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

# Series en espacios de Banach de dimensión infinita.

El estudio de las series en espacios de dimensión infinita fue iniciado por **Orlicz** en 1929-1930.

**Banach** y su grupo solían encontrarse en el Scottish Café en Lvov (ahora Ucrania). Los problemas que se planteaban eran recogidos en el **Scottish Book**, que fue salvado y publicado por Ulam.

**Problema 106:** ¿Es cierto el resultado análogo al teorema de Levy Steinitz para espacios de Banach? El premio era una botella de vino; menor por cierto que por el problema de la aproximación de Mazur, que fue resuelto por Enflo (el premio era una oca).

La respuesta negativa fue obtenida por Marcinkiewicz con un ejemplo en $L_2[0,1]$.

# The Scottish Cafe, Lvov.

# El ejemplo de Marcinkiewicz.

Consideramos las siguientes funciones en $L_2[0,1]$. Aquí $\chi_A$ es la función característica de $A$.

$$x_{i,k} := \chi_{[\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}]}, \quad y_{i,k} := -x_{i,k}, \; 0 \le i < \infty, 0 \le k < 2^i.$$

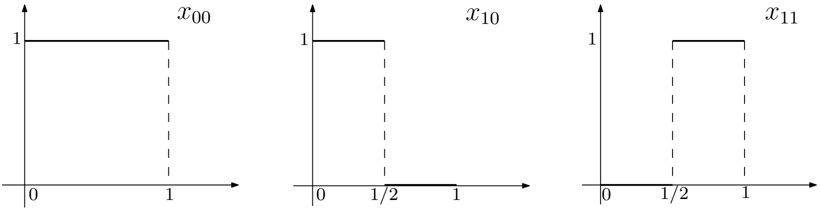
Claramente $||x_{i,k}||^2 = 2^{-i}$ para cada $i, k$. Se tiene

$$(x_{0,0} + y_{0,0}) + (x_{1,0} + y_{1,0}) + (x_{1,1} + y_{1,1}) + (x_{2,0} + y_{2,0}) + \ldots = 0$$

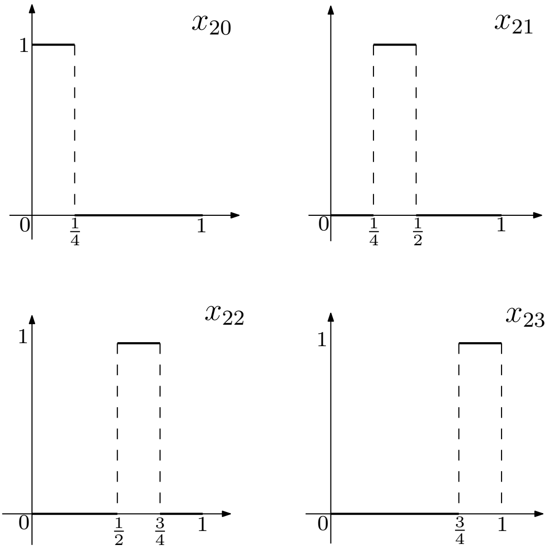
$$x_{0,0} + (x_{1,0} + x_{1,1} + y_{0,0}) + (x_{2,0} + x_{2,1} + y_{1,0}) + (x_{2,2} + x_{2,3} + y_{1,1}) + \ldots = 1$$

Ninguna reordenación converge a la función constante $1/2$ porque todas las sumas parciales son funciones con valores enteros.

# El ejemplo de Marcinkiewicz.



# El ejemplo de Marcinkiewicz.



**El Teorema de Dvoretsky-Rogers. 1950.**

Un espacio de Banach $E$ es de dimensión finita si y sólo si toda serie incondicionalmente convergente es absolutamente convergente.

Este es un resultado muy importante en la teoría de espacios nucleares de **Grothendieck** y en la teoría de operadores absolutamente sumantes de **Pietsch**.

**Ejemplo.** En $\ell_2$, ponemos $u_k := (0, .., 0, 1/k, 0, ...)$. La serie $\sum u_k$ no es absolutamente convergente porque $\sum_1^\infty ||u_k|| = \sum_1^\infty \frac{1}{k} = \infty$. Pero

$$\sum_1^\infty u_k = (1, 1/2, 1/3, ..., 1/k, ...)$$

incondicionalmente en $\ell_2$.

**Teorema de Mc Arthur. 1954.**

Todo espacio de Banach $E$ de dimensión infinita contiene una serie cuyo conjunto de sumas es un sólo punto, pero que no es incondicionalmente convergente.

**Idea en $\ell_2$.** Denotamos por $e_i$ la base canónica.

$$e_1 - e_1 + (1/2)e_2 - (1/2)e_2 + (1/2)e_2 - (1/2)e_2 + (1/4)e_3 - ... = 0.$$

Hemos puesto $2^n$ términos de la forma $2^{-n+1}e_n$ con signos alternados.

Si una reordenación converge, debe sumar 0, como se ve mirando cada coordenada. Pero no es incondicionalmente convergente. Si lo fuera, $(2, 2, 2, ...) \in \ell_2$.

Para un espacio de Banach arbitrario se usan sucesiones básicas.

# Series en espacios de Banach de dimensión infinita.

**Teorema de Kadets y Enflo. 1986-89.**

Todo espacio de Banach $E$ de dimensión infinita contiene una serie cuyo conjunto de sumas consiste de dos puntos diferentes.

**Teorema de J.O. Wojtaszczyk. 2005.**

Todo espacio de Banach $E$ de dimensión infinita contiene una serie cuyo conjunto de sumas es un conjunto finito afínmente independiente arbitrario.

**El teorema de Levy Steinitz falla de modo drástico en espacios de Banach de dimensión infinita.**

# Series en espacios de Banach de dimensión infinita.

**Teorema de Ostrovski. 1988.**

Existe una serie en $L_2([0,1] \times [0,1])$ cuyo conjunto de sumas no es cerrado.

**Problema.**

¿Existe una serie $\sum u_k$ en un espacio de Banach cuyo conjunto de sumas $S(\sum u_k)$ es un subespacio afín no cerrado?

**Teorema.**

Todo espacio de Banach separable contiene una serie cuyo conjunto de sumas es todo el espacio.

**Pregunta.**

¿Puede extenderse el teorema de Levy Steinitz para ciertos espacios de dimensión infinita?

**SI.**

Un espacio localmente convexo $E$ se llama **nuclear** si toda serie incondicionalmente convergente es absolutamente convergente. Para espacios de Fréchet o (DF) coincide con la definición de Grothendieck. En general, no.

**Ejemplos.** $H(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$, $S$, $S'$, $H(K)$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{A}(\Omega)$.

# El teorema de Banaszczyk.

**Teorema de Banaszczyk. 1990, 1993.**

Sea $E$ un espacio de Fréchet. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $E$ es nuclear.

(2) Para cada serie convergente $\sum u_k$ en $E$ se cumple

$$S(\sum u_k) = \sum_{1}^{\infty} u_k + \Gamma(\sum u_k)^{\perp}.$$

Es un resultado muy profundo. Las dos direcciones son difíciles. Son necesarias extensiones de los lemas de confinamiento y de redondeo con operadores de Hilbert-Schmidt, una caracterización de la nuclearidad con números de volumen, grupos topológicos,...

# Series en espacios no metrizables.

**Bonet y Defant** estudiaron en 2000 el conjunto de sumas en espacios no metrizables y, en particular, en espacios (DF), como el espacio $S'$ de Schwartz o el espacio de los gérmenes de funciones holomorfas $H(K)$.

La notación $E = \mathrm{ind}_n E_n$ significa que $E$ es la unión creciente de los espacios de Banach $E_n \subset E_{n+1}$ con inclusiones continuas, y $E$ está dotado de la topología localmente convexa más fina que hace todas las inclusiones $E_n \subset E$ continuas.

# Series en espacios no metrizables.

## Teorema de Bonet y Defant. 2000.

Sea $\sum u_k$ una serie convergente en el espacio (DF) nuclear $E = \mathrm{ind}_n E_n$ (entonces converge en un espacio de Banach $E_{n(0)}$). Se cumple:

(a) $S(\sum u_k) = \sum_1^\infty u_k + \Gamma_{loc}^\perp(\sum u_k)$, donde

$$\Gamma_{loc}^\perp(\sum u_k) :=$$

$$\bigcup_{n \geq n(0)} \{x \in E_n \mid \langle x, x' \rangle = 0 \ \forall x' \in E_n' \text{ con } \sum_1^\infty |\langle u_k, x' \rangle| < \infty\}$$

es un subespacio de $E$.

(b) Si $E$ no isomorfo a una suma directa $\varphi$ de copias de $\mathbb{R}$, entonces existe una serie convergente en $E$ cuyo conjunto de sumas es un subespacio no cerrado.

# Series en espacios no metrizables.

**Teorema de Bonet y Defant. 2000.**

Sea $E = \mathrm{ind}_n E_n$ un espacio (DF) completo en el que toda sucesión convergente en $E$ converge en uno de los espacios de Banach $E_n$. Si se cumple

$$S(\sum u_k) = \sum_1^\infty u_k + \Gamma_{loc}^{\perp}(\sum u_k)$$

para toda serie convergente $\sum u_k$ en $E$, entonces el espacio $E$ es nuclear.

# Series en espacios no metrizables.

- El teorema requiere nuevas mejoras de los lemas de confinamiento y de redondeo.
- Las técnicas de la parte positiva pueden usarse para otros espacios, incluyendo el espacio de las distribuciones $\mathcal{D}'$ o el espacio de las funciones real analíticas $\mathcal{A}(\Omega)$, obteniendo que el conjunto de sumas de una serie convergente es un subespacio afín no necesariamente cerrado.
- El resultado acerca de espacios no isomorfos a $\varphi$ requiere teoremas profundos debidos a Bonet, Meise, Taylor (1991) y de Dubinski, Vogt (1985) acerca de la existencia de cocientes de espacios de Fréchet nucleares que no cumplen la propiedad de aproximación acotada y sus duales.

# Otros problemas abiertos.

- ¿Contiene todo espacio de Fréchet no nuclear una serie $\sum u_k$ cuyo conjunto de sumas consista de dos puntos?
- Mejorar el recíproco para el caso de espacios no metrizables.
- Encontrar espacios concretos $E$ y condiciones en una serie convergente $\sum u_k$ para que su conjunto de sumas $S(\sum u_k)$ tenga la forma del teorema de Levy Steinitz. Chasco y Chobayan tienen resultados en esa dirección en espacios $L_p$.

# Algunas Referencias.

**W. Banaszczyk**, The Steinitz theorem on rearrangement of series for nuclear spaces, J. reine angew. Math. 403 (1990), 187–200.

**W. Banaszczyk**, Rearrangement of series in nonnuclear spaces, Studia Math. 107 (1993), 213–222.

**J. Bonet, A. Defant**, The Levy-Steinitz rearrangement theorem for duals of metrizable spaces, Israel J. Math. 117 (2000), 131-156.

**M.I. Kadets, V.M. Kadets**, Series in Banach Spaces Operator Theory: Advances and Applications 94, Birkhäuser Verlag, Basel 1997.

**P. Rosenthal**, The remarkable theorem of Levy and Steinitz, Amer. Math. Monthly 94 (1987), 342-351.