REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS,
FÍSICAS Y NATURALES

El impacto del análisis funcional en algunos problemas del análisis

Discurso leído en el acto de su recepción como
académico de número por el

Excmo. Sr. José Bonet Solves

23/4/2008

Dedicado, por supuesto, a la memoria de mi padre.

1. Introducción

Excelentísimo Señor Presidente,
Excelentísimos Señores Académicos,
Señoras y Señores,

En primer lugar quiero expresar mi más sincero agradecimiento a los miembros de esta Real Academia de Ciencias por el gran honor que me han concedido al haber confiado en mí para compartir sus tareas como miembro numerario. Confío que, con la ayuda de todos ustedes, pueda contribuir a la vida de la Real Academia de Ciencias en la medida de mis posibilidades. Les aseguro que haré cuanto esté en mi mano para tratar de responder adecuadamente a las expectativas que ustedes han tenido la amabilidad de depositar en mí.

Desde 1994 he venido colaborando con las actividades de esta institución como académico correspondiente. Mi primer trabajo científico se publicó en 1980 en la revista de esta Real Academia, y posteriormente he publicado otros y colaborado muy activamente con la revista. Son miembros de esta institución muchos científicos que admiro, respeto y de los que he aprendido mucho a lo largo de mi carrera. Debo mencionar a Don Manuel Valdivia, que fue el director de mi tesis doctoral, a quien considero mi maestro, y que tanto ha influido en mi manera de ver las matemáticas y la investigación, y a Don Manuel López Pellicer, con quien he tenido la suerte de trabajar en la Universidad Politécnica de Valencia.

Vengo a ocupar la vacante dejada por el ilustre Profesor Miguel de Guzmán Ozamiz, científico y humanista, que fue uno de los matemáticos españoles más importantes e influyentes del siglo pasado. Él ostentaba la medalla número 4.

Es a la vez muy fácil y muy difícil decir unas palabras sobre Don Miguel de Guzmán y sobre su papel en esta Real Academia. Es muy fácil porque se han escrito muchos artículos recientemente sobre su persona y sobre su trabajo. Y es muy difícil porque es imposible en unos minutos hacer justicia a su labor y a su influencia en las matemáticas en nuestro país.

Miguel de Guzmán nació en Cartagena en 1936. Comenzó sus estudios de Ingeniería Industrial en Bilbao, pero los abandonó para completar la licenciatura en Filosofía en Munich (Alemania) en 1961. Miguel era un humanista, con una cultura muy amplia. Regresó a Madrid, donde acabó Matemáticas en 1965. Ese año el profesor Alberto Calderón visitó Madrid e invitó a Miguel a trabajar en Chicago en la prestigiosa escuela de análisis armónico e integrales singulares de Calderón y Zygmund. Guzmán presentó su tesis doctoral en la Universidad de Chicago, bajo la dirección de Calderón, en 1968 y volvió a la Universidad Complutense de Madrid en 1969. Guzmán dirigió quince excelentes tesis doctorales, y su influencia en la investigación y la docencia de las Matemáticas en España en los últimos veinticinco años ha sido inmensa.

Desde el principio de los años 1980, la docencia de las Matemáticas se convirtió en el centro de la mayoría de los proyectos emprendidos por el profesor Guzmán. Fue presidente de la asociación mundial de profesores de Matemáticas, desde 1991 a 1998. No puedo resistir la tentación de repetir aquí unas palabras de Miguel en una entrevista aparecida en el año 2000 acerca del nivel de los alumnos que llegan a la Universidad, con la que estoy profundamente de acuerdo:

> *El nivel ha bajado mucho. A mi juicio, las causas del fracaso son dos: que los niveles con los que llega el alumnado son malos y que los profesores que los reciben no hacen lo que debieran. Olvídate de quejarte, hay que coger a los alumnos donde están y tirar de ellos hacia adelante; entrenarlos a partir de ahí, ¿que van a bajar mucho los niveles? Pues mira, a ti lo que la sociedad te pide es que subas el nivel de los alumnos que llegan.*

Esa es verdaderamente nuestra misión como educadores.

Miguel de Guzmán fue elegido en junio de 1982 para ocupar la medalla número 4 de la Real Academia de Ciencias. Ingresó en esta Academia a los

47 años, en la sesión solemne celebrada en marzo de 1983, leyendo el discurso de ingreso “Impactos del Análisis Armónico”, una auténtica obra de arte. Desde 1998 intensificó sus actividades en la Academia, por ejemplo en el diseño y puesta en funcionamiento del Programa “Detección y estímulo del talento matemático”, que ahora se ha implantado en toda España.

En 2001 tuvo la amabilidad de aceptar mi invitación para impartir una conferencia en unas Jornadas dirigidas a profesorado de enseñanza media en Valencia. Su conferencia fue un gran éxito, ya que era un ameno conferenciante que siempre motivaba a su audiencia. Nunca olvidaré la cena a la que las autoridades políticas nos invitaron el día de su conferencia. Miguel trató, parcialmente en vano por desgracia, de dirigir la conversación hacia temas culturales, científicos o serios, mientras los responsables de enseñanzas medias de la Conselleria, que pagaban la cena, insistían en discutir los éxitos deportivos de sus equipos de fútbol, las inversiones inmobiliarias, los locales de moda en la ciudad o los excelentes planes desarrollados por el partido gobernante.

Miguel de Guzmán nos enseñó a todos la pasión por las matemáticas y su preocupación por la docencia. Su influencia en el gran éxito de la investigación matemática y su desarrollo en los últimos veinticinco años es indudable.

2. Presentación. Sumario

El propósito general de esta presentación es discutir el impacto del análisis funcional en algunos problemas del análisis matemático y su relevancia actual. Es mi intención aprovechar también esta oportunidad para hacer una reflexión con ustedes acerca de las motivaciones en la selección de problemas de investigación en los que he trabajado. Si les dijera que he trabajado en los temas que me gustaban y me parecían interesantes en cada momento, no dejaría de ser cierto y podríamos terminar este discurso ahora mismo. Sin embargo, vamos a analizar la cuestión más a fondo. Intentaremos comprender cómo algunos temas del análisis funcional aparecen de modo natural en cuestiones del análisis matemático y de qué modo constituyen una herramienta poderosa para la solución de problemas concretos.

El desarrollo de muchos temas del análisis funcional a los que he dedicado mi investigación ha estado muy relacionado con los operadores lineales en derivadas parciales. Los problemas a tratar incluyen, entre otros, la interpolación de funciones, la solubilidad de ecuaciones en derivadas parciales, la extensión de funciones diferenciables u holomorfas, o los valores frontera de las distribuciones.

Es muy complicado dirigirse a una audiencia como la que hoy tengo frente a mí, formada por expertos en muchas ramas de la ciencia y en particular en matemáticas, pero también por familiares y amigos. Desgraciadamente es seguro que no voy a ser lo bastante hábil para interesar a todos ustedes, pero intentaré cumplir una de las recomendaciones de Gian Carlo Rota en un artículo de 1997: da a la audiencia algo para llevar a casa. Claro que cada uno deberá llevarse algo distinto, vamos a intentarlo.

Miren ustedes, antes de continuar con la exposición les voy a hacer una confesión. En algunas de las ocasiones en las que estoy nervioso antes de impartir una charla, como por ejemplo en este momento, me acuerdo de Marx..., me refiero a Grouch Marx. Creo que es en "Sopa de Ganso" Groucho asiste a una fiesta. Al terminar, se despide de la anfitriona, la actriz Margaret Dumont, y le dice: "Señora, he pasado una velada estupenda, pero no ha sido esta”. Mi pesadilla es que alguien de la audiencia se me acerque después de la conferencia y me diga: “Pepe, he oído una charla estupenda, pero no ha sido la tuya.”. En fin, ya veremos. Sigamos.

3. La Teoría de Distribuciones de L. Schwartz

El tema que les quiero exponer comienza con la teoría de las distribuciones de Laurent Schwartz. La teoría de las distribuciones, publicada en 1951, transformó a partir de entonces muchas áreas del análisis y supuso un gran avance en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales. Schwartz asimiló muchas ideas y descubrimientos de las décadas precedentes y añadió otras nuevas. La profunda conexión entre el análisis funcional y las ecuaciones en derivadas parciales fue establecida en el trabajo fundamental de finales de los años 1950 y 1960 de Malgrange, Ehrenpreis y Hörmander.

Laurent Schwartz nació en 1915 y falleció en 2002. En 1934 ingresó en l'École Normale Supérieure, donde impartían clases E. Borel, E. Cartan, A. Denjoy, M. Fréchet, G. Julia y P. Montel, entre otros menos conocidos. En 1941 se unió al grupo Bourbaki. En su tesis de 1942, ya se puso de manifiesto uno de los rasgos característicos de las matemáticas de Schwartz: la utilización de un marco abstracto y de herramientas del análisis funcional para resolver problemas de análisis clásico. Yo siempre he tratado de imitar, modestamente claro, esta actitud en la investigación.

Schwartz recibió la medalla Fields de 1950 por la teoría de distribuciones y en 1952 fue nombrado profesor de la Facultad de Ciencias de París. Durante su carrera tuvo muchos alumnos. Como ejemplo mencionamos que hicieron la tesis doctoral bajo su dirección L. Boutet de Monvel, A. Grothendieck, J.-L. Lions, B. Malgrange, A. Martineau y F. Trèves. Se jubiló en 1980.

Schwartz fue un gran intelectual comprometido en el sentido más estricto, pero su autobiografía comienza con la siguiente frase:

> *Yo soy un matemático, las matemáticas han llenado mi vida...*

y en otro lugar añade

> *...siempre he querido cambiar el mundo. He consagrado una gran parte de mi vida a la política, adoptando la "carrera de intelectual*

comprometido". Pero las matemáticas han seguido siendo primordiales...Muchas veces he hecho política por el sentido del deber, pero la política no me interesa: mis tres pasiones son la investigación, la enseñanza y la entomología.

Como cuenta el propio Schwartz en su autobiografía, el maravilloso descubrimiento de las distribuciones se produjo en París en noviembre de 1944 en una sola noche; luego mejoró la definición en febrero de 1945. Es curioso comentar en este punto que cuando, en 1944, Schwartz mencionó a H. Cartan su inclinación a usar los elementos de $\mathcal{D}$ como funciones test, Cartan intentó disuadirlo diciéndole que eran demasiado "monstruosas". El análisis funcional abstracto y la teoría de distribuciones se han influido mutuamente de modo muy beneficioso.

Por ejemplo, el concepto de límite inductivo de espacios de Fréchet se originó en la teoría de distribuciones. En 1949 apareció el trabajo de Dieudonné y Schwartz que iniciaba la teoría de límites inductivos de espacios localmente convexos. Al final de este artículo los autores proponen una serie de problemas. Todos ellos fueron resueltos por Alexandre Grothendieck, uno de los más grandes matemáticos del siglo XX, que ganó la medalla Fields en 1966 por sus aportaciones a la geometría algebraica y el álgebra homológica, pero que antes de trabajar en esos temas había hecho contribuciones esenciales al análisis funcional. En 1949, Dieudonné y Schwartz pasaron a Grothendieck, recién llegado a su seminario, los problemas que tenían abiertos. Para su sorpresa, unos meses después Grothendieck los había resuelto todos, y había trabajado en muchas otras cuestiones del análisis funcional.

El artículo de Grothendieck que recoge la solución de los problemas de Dieudonné y Schwartz fue publicado en 1954. Al final del mismo Grothendieck plantea diez problemas. Algunos fueron resueltos Amemiya, Dieudonné, Komura, Susanne Dierolf y Valdivia. En los años 1980 varios de los problemas mencionados por Grothendieck permanecían abiertos. Valdivia resolvió positivamente el problema 9 en 1989 con un teorema precioso en acerca de espacios totalmente reflexivos. S. Dierolf y yo resolvimos en 1988 uno de ellos y en 1991 resolvimos otro conjuntamente con Susanne Dierolf y Carmen Fernández. El problema que Grothendieck consideraba más importante fue resuelto negativamente por Jari Taskinen en 1986. Su solución dio origen a una línea de investigación acerca de productos tensoriales en la que se hicieron muchas contribuciones interesantes hasta mediados de los años 1990, entre otros por Juan Carlos Díaz, Andreas Defant, Klaus Floret y por mi antiguo alumno Alfredo Peris, que obtuvo por la solución de varios problemas abiertos el premio Lucien Godeaux en 1996. Su trabajo fue continuado por Elisabetta Mangino, que también realizó su tesis bajo mi dirección.

Las mayores contribuciones de Schwartz fueron su decisión de tomar el espacio de las distribuciones atemperadas como el marco adecuado para el análisis de Fourier y el teorema de los núcleos. El teorema de los núcleos de Schwartz fue el punto de partida de la teoría de los espacios nucleares presentada por Grothendieck en su tesis en 1955. La memoria de Grothendieck también termina con una lista de diez problemas profundos abiertos. Fueron resueltos por Enflo, Komura, de Wilde, Dubinski, Pisier y Taskinen. Curiosamente, el problema 9, acerca de espacios (LF) completos, es el único problema de Grothendieck que permanece abierto, a pesar de los esfuerzos de muchos autores, como S. Dierolf, Domański, Vogt, Wengenroth, quien se dirige a ustedes y muchos otros.

En el final de los años 1970, quienes empezabamos a trabajar en la Universidad de Valencia con el profesor Valdivia para hacer la tesis, teníamos que pasar el primer curso estudiando a fondo el primer tomo de la monografía de Köthe acerca de espacios vectoriales topológicos. En aquel tiempo Valdivia logró dar una representación como espacio de sucesiones de los principales espacios de la teoría de distribuciones, en un artículo magnífico publicado en la revista de la Academia en 1978. El caso es que Valdivia había decidido que yo iba a trabajar en mi tesis acerca de la representación de espacios de funciones y distribuciones con valores vectoriales. En una de mis primeras conversaciones privadas con Don Manuel, cuando ya había completado la lectura del primer tomo del libro de Köthe, en el verano de 1978, me escribió a mano una lista, que aún conservo entre las páginas de mi copia personal del libro de Rudin de análisis funcional, de todo aquello que tenía que estudiar antes de empezar la tesis: teoría de distribuciones, espacios de funciones y de distribuciones con valores vectoriales, productos tensoriales, la memoria de Grothendieck, variedades diferenciables y sus trabajos. Sobreviví y aquí estamos hoy. No puedo decir que leyera todo eso antes de completar mi tesis, pero sí mucho de ello y muchas cosas más, y le estoy agradecido por haberme indicado entonces una dirección de trabajo que me obligó a tener una formación variada, relacionada con el análisis, y que pudiera familiarizarme con el trabajo espectacular de Schwartz.

A pesar del gran éxito cosechado por las distribuciones de Schwartz, Garding explica en un artículo en 1997 que al principio la teoría de distribuciones fue acogida con reservas y cierta hostilidad entre algunos matemáticos. El matemático sueco Beurling solía decir que la teoría "no tenía teoremas de unicidad". Cuando Hörmander defendió su tesis en 1955, su oponente (una figura importante en la defensa de las tesis doctorales en los países escandinavos) fue J.-L. Lions. Marcel Riesz, maestro de Hörmander, que tenía en el momento 69 años y no había leído la tesis, estaba preocupado de que tuviera demasiada terminología vaga de distribuciones. Sin embargo se sintió aliviado cuando Lions explicó que, en la base de todo el trabajo estaban "las desigualdades de Hörmander". Todas esas reservas desaparecieron con el tiempo. Conviene recordar aquí las palabras de Hörmander en el prefacio de su obra monumental en 1983:

> *El progreso en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales lineales durante los pasados treinta años debe mucho a la teoría de distribuciones creada por Laurent Schwartz al final de los años 1940. Sumaba una gran parte de la experiencia acumulada en el estudio de ecuaciones en derivadas parciales hasta aquel momento y proporcionó un marco ideal para desarrollos posteriores.*

4. Ecuaciones en derivadas parciales

4.1. Introducción y Notación

Así pues vamos a hablar ahora de ecuaciones en derivadas parciales y comenzamos con una anécdota de Trèves. En 1948 Schwartz visitó Suecia para presentar su teoría de distribuciones y tuvo oportunidad de conversar con Marcel Riesz. Después de escribir la fórmula de integración por partes para explicar la idea de derivada débil, fue interrumpido por Riesz diciendo, "espero que haya encontrado algo más en su vida". Más tarde Schwartz le comentó a Riesz su esperanza de demostrar que toda ecuación en derivadas parciales lineal con coeficientes constantes tiene una solución fundamental, un concepto que sólo pudo hacerse preciso con la teoría de distribuciones. "¡Una locura!", exclamó Riesz, "eso es un proyecto para el siglo XXI". Sin embargo el teorema fue demostrado por Ehrenpreis y Malgrange en 1953.

Las ecuaciones en derivadas parciales juegan un papel central en matemáticas puras y aplicadas, y su estudio ha proporcionado y sigue proporcionando resultados de enorme interés teórico y práctico. Estas ecuaciones expresan de modo directo, por ejemplo, las leyes fundamentales del movimiento de Newton, que permitieron la primera descripción cuantitativa del movimiento planetario. Posteriormente permitieron el establecimiento de leyes básicas en muchos fenómenos, como el movimiento de fluidos, los campos eléctricos, la transmisión de calor o de masa, movimientos atmosféricos y muchos otros fenómenos físicos, químicos o tecnológicos. Aparecieron en problemas de hidrodinámica (D'Alembert, 1752), la membrana vibrante (Euler, 1766) y la teoría del potencial (Laplace, 1789). En el siglo XIX los problemas de elasticidad y conducción del calor, y las investigaciones de pioneros como Fourier o Heaviside, llevaron a la introducción de conceptos novedosos, que tuvieron un papel central más adelante.

Las tesis de Malgrange y Hörmander, ambas de 1955, constituyeron los primeros tratados completos de la teoría general de ecuaciones en derivadas parciales.

Malgrange nació en París en 1928 y fue alumno de l'Ecole Normale Supérieure. Malgrange completó su tesis bajo la dirección de Schwartz en 1955. Fue profesor en París, Orsay y Grenoble. En 1977 fue elegido miembro correspondiente de la Academia de Ciencias de París y numerario en 1988.

Por su parte, Hörmander nació en Mjällby, Suecia, en 1931. Estudió en la Universidad de Lund. En 1962, en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Estocolmo, Hörmander recibió la medalla Fields por sus contribuciones a la teoría de ecuaciones en derivadas parciales, y en particular por sus resultados acerca de operadores en derivadas parciales hipoelípticos.

4.2. Los problemas de Schwartz acerca de Ecuaciones en Derivadas Parciales

El desarrollo de la teoría general de ecuaciones en derivadas parciales en los años 1950 y 1960 se realizó en torno a los siguientes problemas planteados por Schwartz:

(1) Existencia de solución fundamental.

(2) Problema de la aproximación.

(3) Problema de la regularidad de soluciones.

(4) Problema de la solubilidad de las ecuaciones en derivadas parciales.

El primer uso de soluciones fundamentales puede adscribirse a d'Alembert en 1747 cuando obtuvo la solución del problema de la cuerda vibrante. En 1789 Laplace usó la solución fundamental del operador elíptico en tres variables que lleva su nombre, y estableció la conexión con el potencial gravitacional de Newton.

El primer teorema general de existencia de soluciones fundamentales para operadores en derivadas parciales lineales con coeficientes constantes fue obtenido en 1953/54 por Malgrange y Ehrenpreis. Sus pruebas estaban basadas en el teorema de Hahn-Banach.

Cuenta Schwartz que Leon Ehrenpreis le había puesto en una situación embarazosa. Malgrange y Ehrenpreis trabajaron durante muchos años en problemas semejantes y prepararon sus tesis al mismo tiempo. Ehrenpreis realizó su tesis bajo la dirección de C. Chevalley en la Universidad de Columbia en 1953. Ehrenpreis publicó una importante serie de artículos acerca de soluciones de algunos problemas de división. Dice Schwartz

> *Yo trabajaba en estrecha colaboración con Malgrange, pero también con Ehrenpreis, quien me enviaba sus reflexiones regularmente por correo. Me preguntaba si debía hablar con Malgrange acerca de las sugerencias que Ehrenpreis me enviaba. Uno y otro avanzaban y me resultaba imposible mantener el equilibrio. Finalmente, aunque fuera profundamente anti-científico, le pedí a Ehrenpreis que no me enviara sus proyectos y se limitara a enviarme sus artículos para publicar, una vez estuvieran terminados. Comprendió esa situación desagradable para mí y le estoy muy agradecido.*

Más adelante, entre 1957 y 1958 Hörmander y Łojasiewicz resolvieron el problema de la división de distribuciones y probaron la existencia de soluciones fundamentales atemperadas.

El problema de la solubilidad consiste en caracterizar los polinomios $P(z)$ y los abiertos Ω tales que el operador en derivadas parciales $P(D)$ es sobreyectivo en en el espacio de las funciones indefinidamente diferenciables o en el espacio de las distribuciones. La caracterización para las funciones diferenciables es debida a Malgrange y Ehrenpreis independientemente y la respuesta completa en el caso de distribuciones fue obtenida por Hörmander en 1962.

Desde 1962 se intentó establecer teoremas abstractos análogos al de Hörmander. Palamodov desarrolló en 1968 un estudio homológico de la sobreyectividad de operadores lineales y continuos y su teoría puede considerarse como una versión abstracta del método de Mittag-Leffler.

El estudio de herramientas homológicas en análisis funcional en los últimos años por Vogt, Braun, Domański, Frerick, Langenbruch, Meise, Taylor, Wengenroth y yo mismo ha constituido una aportación esencial para dar nueva luz sobre diversos problemas analíticos. Estos problemas incluyen entre otros la sobreyectividad, la existencia de operador de solución y la dependencia paramétrica para operadores en derivadas parciales lineales y la existencia de operador de extensión lineal y continuo de funciones analíticas o diferenciables.

Veamos el origen de algunas de estas herramientas.

En 1952, sólo unos años después de la introducción de las distribuciones por Schwartz, Köthe, como consecuencia de sus importantes resultados acerca de la dualidad en los espacios de funciones holomorfas de una variable compleja, observó la relación existente entre las distribuciones en la circunferencia unidad y las funciones holomorfas en su complemento en el plano complejo. Poco después Tillmann generalizó los resultados de Köthe en varias direcciones. El trabajo de ambos inauguraba el estudio de la representación de distintos espacios de distribuciones como valores en la frontera de espacios de funciones holomorfas. Muchos autores, como Martineau, Vladimirov, Carmichael, Meise, Petzsche y Vogt entre otros, proporcionaron importantes resultados. Estas investigaciones han sido continuadas recientemente por Langenbruch y por Fernández, Galbis y Gómez-Collado.

La representación de los espacios de (ultra)distribuciones (con valores vectoriales) como valores frontera era uno de los temas centrales de estudio de la escuela en torno a Tillmann en Maguncia (Mainz) al final de los años 1960 y principios de los 1970. Pertenecen a ella Albrecht, Bierstedt, Gramsch, Kaballo, Meise y Vogt. Desde que comencé a colaborar con algunos miembros de esta escuela en 1983, me considero modestamente también miembro de la herencia alemana de Köthe.

Gottfried Köthe nació en Graz, Austria, en 1905 y falleció en Frankfurt en 1989. Comenzó a estudiar química y filosofía en la Universidad de Graz en 1923. Fascinado por las paradojas de la teoría de conjuntos, decidió estudiar matemáticas y completó su tesis doctoral en 1927. Escribió que

> *las matemáticas me atraían mucho más que la filosofía; en el razonamiento matemático encontré la precisión y certeza que había buscado en la filosofía, pero que no pude encontrar en ella.*

Por recomendación de Noether, se marchó a trabajar con Otto Toeplitz a Bonn en 1929 y comenzó con él una colaboración que duró hasta el fallecimiento de Toeplitz en 1940. En 1960, con ocasión de su eleccción como miembro de la Academia de Heidelberg, escribía Köthe:

> *Juntos desarrollamos la teoría de los espacios perfectos, complementaria de los espacios de Banach. Después de la segunda guerra mundial ambas teorías se incorporaron en la teoría de los espacios vectoriales topológicos, que alcanzó su forma definitiva de la mano de los matemáticos franceses de la escuela de Bourbaki, después de que las herramientas topológicas se hubieran desarrollado suficientemente. Desde mis primeros artículos con Toeplitz, he permanecido más o menos fiel a esta área de matemáticas, llamada análisis funcional, que puede ser caracterizado como una penetración y desarrollo ulterior del análisis clásico con la ayuda de conceptos algebraicos y topológicos.*

La representación de las distribuciones de varias variables fue resuelta por Vogt en 1973. Estas investigaciones le condujeron a la condición (DN), llamada así por "norma dominante", a la caracterización de los subespacios y cocientes del espacio de las sucesiones de decrecimiento rápido y, en 1980, al famoso teorema de escisión de Vogt y Wagner. Las aplicaciones de este resultado a operadores de extensión de funciones, operadores de solución de ecuaciones en derivadas parciales, espacios de funciones analíticas o a la teoría estructural de espacios de Fréchet se sucedieron de inmediato y continúan en la actualidad.

En los últimos años se han estudiado teoremas de escisión en el contexto de los espacios llamados (PLS). Esta clase contiene los espacios más importantes que aparecen en las aplicaciones analíticas del análisis funcional lineal, como los espacios de distribuciones o los espacios de las funciones real analíticas o ultradiferenciables. En trabajos conjuntos con Domański muy recientes hemos emprendido un estudio sistemático de la escisión de sucesiones exactas de espacios (PLS) y sus aplicaciones, especialmente a la dependencia paramétrica de ecuaciones en derivadas parciales en espacios de distribuciones. Varios problemas interesantes permanecen abiertos.

4.3. Existencia de operador de solución para un operador en derivadas parciales con coeficientes constantes

Dentro de la correspondencia mencionada anteriormente entre Schwartz y Ehrenpreis en los años 1950, Schwartz le planteó el siguiente problema: Caracterizar los operadores $P(D)$ y los abiertos Ω tales que existe un operador lineal y continuo de solución. Existían resultados parciales, pero el problema fue resuelto en 1990 por Meise, Taylor y Vogt con varias caracterizaciones. Por ejemplo, en el caso global, un operador admite una inversa a la derecha lineal y continua si y sólo si cumple una condición de tipo Phragmén-Lindelöf en la variedad cero del polinomio P. El principio de Phragmén-Lindelöf es una extensión muy útil del principio del máximo para funciones analíticas o armónicas, que fue demostrado en 1904 por Phragmén, un alumno de Mittag-Leffler, y tomó su forma final en un artículo conjunto con Lindelöf de 1908. El refinamiento más importante fue obtenido por Carleman en 1923.

Sería deseable obtener condiciones geométricas en la variedad que caracterizaran los diferentes principios de tipo Phragmén-Lindelöf que describen el comportamiento de los operadores en derivadas parciales. Éste es un programa muy amplio y difícil. Braun, Meise, Taylor han dedicado muchos esfuerzos a entender el significado geométrico en la variedad de los principios de Phragmén-Lindelöf en este siglo, obteniendo muchos resultados importantes, que están relacionados con la geometría de variedades analíticas.

4.4. Operadores de convolución, el principio fundamental de Ehrenpreis y límites inductivos ponderados

El estudio de los operadores de convolución en espacios de distribuciones fue iniciado por Malgrange en su tesis y por Ehrenpreis. La solubilidad de ecuaciones de convolución está relacionada con la descripción proyectiva de límites inductivos de espacios de funciones holomorfas.

Comencé a trabajar en este tema en mi estancia postdoctoral en la Universidad de Paderborn en 1983. Desde entonces he resuelto varios problemas abiertos y he realizado contribuciones que han supuesto avances interesantes. No es ahora el momento de revisarlos aquí. Aprendí y trabajé mucho en Alemania aquel verano y la experiencia fue muy importante para mí e influyó en mi forma de ver el análisis funcional. La idea de que éste tenía que estar necesariamente relacionado con los espacios de funciones, las ecuaciones en derivadas parciales o los problemas analíticos era nueva para mí y se convirtió desde entonces en un principio básico, que he tratado de transmitir a todos mis discípulos. Mi agradable y fructífera colaboración con mis amigos Klaus Bierstedt y Reinhold Meise ha continuado desde entonces. Estoy muy agradecido a las instituciones que han subvencionado todas esas estancias, en particular a la Fundación Alexander von Humboldt.

4.5. Los operadores pseudodiferenciales. El análisis tiempo-frecuencia

Quiero acabar esta parte de mi exposición hablándoles del análisis tiempo-frecuencia.

El análisis armónico se puede entender como la investigación de la descomposición de complicados objetos matemáticos en bloques más simples. La transformada de Fourier $\hat{f}(\xi)$ de una función o señal $f(x)$ de n variables y su formula de inversión estudian el contenido de f en frecuencia.

El análisis tiempo-frecuencia se originó con los trabajos de Weyl y Von Neumann de los años 1930 sobre las bases matemáticas de la mecánica cuántica y con el trabajo de Gabor de 1946 acerca de la teoría de la información. Weyl introdujo un cierto tipo de operadores pseudodiferenciales que se pueden describir como una superposición de traslaciones y modulaciones y han sido considerados en ingeniería para la descripción de sistemas no estacionarios y estudio de señales.

En el año 2000, Miguel de Guzmán, en su artículo acerca de los caminos de la matemática hacia el futuro, señalaba como problema concreto la necesidad de desarrollar nuevas formas de computación, que permitieran enfrentarse a los nuevos retos que provienen de las matemáticas de la vida, la investigación de las funciones de la mente humana, la seguridad informática o el tratamiento de imágenes. Con la llegada de las tecnologías digitales, la traducción de información analógica en representaciones digitales de modo fiable se ha convertido en uno de los grandes retos. El método de traducción, llamado muestreo, requiere que se seleccione suficiente información del objeto analógico para que se pueda reproducir en forma digital, de modo que no se pierda información clave. El análisis armónico es la herramienta matemática adecuada para estudiar y procesar las señales. Se trata de diseñar mecanismos que permitan el tratamiento de señales provenientes de sistemas complejos. El análisis armónico busca representaciones convenientes de objetos complicados para permitir tareas como comprimir datos de imágenes, hacer cálculos complicados rápidamente o ampliar imágenes médicas. Por ejemplo, la teoría del muestreo compresivo de Candès promete tener influencia en muchas tecnologías modernas, como el teléfono móvil, tecnología médica, seguridad aeronáutica, conocimiento del universo, búsqueda de petróleo, teoría de la información, compresión de imagenes o diseño gráfico por ordenador.

El estudio de los operadores pseudodiferenciales con métodos de análisis tiempo-frecuencia es un área de investigación muy activa. Podemos mencionar, por ejemplo, las contribuciones de Feichtinger, Gröchenig, Carmen Fernández, Antonio Galbis y David Jornet.

5. Extensión de funciones diferenciables

5.1. El teorema de Borel, el teorema de Whitney y operadores de extensión de funciones de clase C^∞

En 1895, E. Borel probó que para cada sucesión $(c_n)_n$ de números complejos existe una función f de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ tal que $f^{(n)}(0) = c_n$ para cada $n = 0, 1, ...$ En 1934, H. Whitney generalizó todos los resultados precedentes para el caso de un subconjunto cerrado arbitrario y probó que la función f puede tomarse real analítica en el complementario. Preguntó cuándo existe un operador de extensión lineal y continuo en el contexto C^∞, similar al que existe en el caso de orden finito.

Hassler Whitney nació en 1907 en Nueva York y falleció en 1989 en Suiza. Realizó el doctorado en la Universidad de Harvard bajo la dirección de Birkhoff acerca de grafos en 1932. Fue catedrático en Harvard hasta que aceptó una plaza en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton en 1952. Whitney realizó aportaciones muy relevantes en muchos temas, como combinatoria, funciones diferenciables, espacios analíticos, variedades diferenciables, topología algebraica, etc. Retornó a los problemas de extensión al final de los 1940, respondiendo una pregunta formulada por L. Schwartz acerca de ideales de funciones diferenciables. Schwartz le propuso en un congreso el problema a Whitney, que contestó que le daría le respuesta en un cuarto de hora. No fue tan rápido, pero seis meses después envió la solución, que era, según palabras de Schwartz, notable (“*remarquable*”).

Resultados positivos y negativos acerca del problema de Whitney fueron obtenidos por Mityagin, Seeley, Stein, Bierstone, Plesniak y otros. En 1979 Tidten dio la primera caracterización de la existencia de un operador de extensión en el caso de un conjunto compacto F en términos de la condición (DN) de Vogt. La analiticidad de la función extendida fuera del conjunto F sólo volvió a aparecer en el trabajo conjunto de Schmets y Valdivia en 1997.

5.2. Una versión precisa del teorema de Whitney. El trabajo de Fefferman

Charles Fefferman, de la Universidad de Princeton y ganador de la medalla Fields en 1978 ha dedicado en el presente siglo una serie de artículos al siguiente problema que fue planteado por Whitney en 1934:

Supongamos que nos dan una función $f : E \to \mathbb{R}$, donde E es un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}^n$. ¿Cómo podemos decidir si la función f se extiende a una función F de clase C^m en todo $\mathbb{R}^n$?

La solución de Fefferman viene dada mediante una forma más precisa del teorema de extensión de Whitney. Para probar ese teorema, Fefferman considera "el problema de la extensión finita" Este problema está relacionado con la posibilidad de que un científico experimental trate de determinar si una función desconocida $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase C^m haciendo un número finito de mediciones, es decir, determinando F en un conjunto finito grande E. Por supuesto, no podrá decidir si F es de clase C^m tomando una cantidad finita de valores, sin embargo podrá preguntarse si los datos fuerzan que la norma C^m de la función F sea grande, o si crece demasiado conforme mayor sea el número de datos calculados. Todas las aportaciones recientes de Fefferman y otros autores constituyen una impresionante contribución al análisis matemático, proporcionando muchas nuevas técnicas e ideas que serán sin duda explotadas y reelaboradas en un futuro próximo.

6. Funciones real analíticas

Un objeto central de estudio en los últimos años han sido los espacios de funciones real analíticas.

Las funciones real analíticas son un objeto clásico de estudio en análisis matemático. Todas las funciones usuales del cálculo diferencial son analíticas, y de hecho Newton consideraba sólo funciones que se pudieran desarrollar en serie de potencias. Las funciones real analíticas aparecen en muchas cuestiones de análisis clásico y de geometría diferencial.

La topología del espacio de las funciones real analíticas es complicada. Domański y Vogt en 2000 demostraron que este espacio no tiene base de Schauder. De este modo dieron el primer ejemplo de un espacio separable, completo, que existía ya en análisis, y que no tiene base. Las propiedades de los límites proyectivos de espacios (DFS), los espacios (PLS) que mencioné antes, juegan un papel central en la demostración de este resultado.

Desde 2003, Domański, Frerick, Langenbruch, Vogt y quien les habla han realizado un estudio sistemático de este espacio, la estructura de sus subespacios y cocientes, la escisión de sucesiones exactas, la clasificación isomorfa y los operadores de composición. Algunos problemas permanecen abiertos. Por ejemplo no sabemos si el espacio de las funciones real analíticas en la recta real es isomorfo al producto de ese espacio por sí mismo.

Debido a la complicada estructura topológica del espacio de las funciones real analíticas, los operadores lineales $P(D)$ en derivadas parciales con coeficientes constantes no se comportan del mismo modo que en $C^\infty(\Omega)$. En 1973 Piccinini confirmó una conjetura de Cattabriga y De Giorgi, mostrando que el operador del calor de dos variables no era sobreyectivo en $A(\mathbb{R}^3)$. Hörmander, en 1973, en un artículo fundamental caracterizó los operadores $P(D)$ que son sobreyectivos en $A(\Omega)$, para Ω un abierto convexo en $\mathbb{R}^d$ en términos de una condición de tipo Phragmén-Lindelöf en la variedad nula del polinomio $P(z)$, que influyó mucho el trabajo de Meise, Taylor y Vogt. En 2004, Langenbruch combina los métodos de Kawai y los métodos de análisis funcional desarrollados por Palamodov, Vogt, Wengenroth y otros, que él mismo mejora, para obtener una caracterización de la sobreyectividad de $P(D)$ en $A(\Omega)$ para un abierto arbitrario Ω. Sin embargo, no se sabe, por ejemplo, si un operador es sobreyectivo si y sólo si lo es su parte principal, salvo si el abierto es convexo. Esta sigue siendo un área de investigación muy activa.

7. Funciones ultradiferenciables

Hablemos ahora de unas clases que están entre las funciones real analíticas y las indefinidamente diferenciables: las llamadas funciones ultradiferenciables.

Borel, hacia el final del siglo XIX, introdujo la idea de casi analiticidad en su intento de generalizar el principio de prolongación analítica. Deseaba determinar las funciones C^∞ en un intervalo con la propiedad de que estuvieran determinadas por los valores de sus derivadas en un punto del intervalo. El problema natural de caracterizar las funciones casi analíticas fue tomando cuerpo, y Hadamard en 1912 tuvo la intuición de formular la cuestión de modo preciso. El problema de Hadamard desató gran interés. Denjoy en 1921 determinó una condición suficiente. Carleman presentó una solución completa en 1923 en una serie de artículos magistrales. Ricardo San Juan, que fue el director de tesis del Valdivia, y Baltasar Rodríguez Salinas, que fueron ambos miembros de esta Real Academia, realizaron importantes aportaciones acerca de las clases (no) casi analíticas. En los años 1960 Roumieu, un estudiante de Schwartz, extendió la teoría de las distribuciones usando las clases no casi analíticas, en las que existen funciones no triviales con soporte compacto, introduciendo así las ultradistribuciones.

La importancia de las clases no casi analíticas para las ecuaciones en derivadas parciales reside en que las ultradistribuciones permiten obtener más soluciones "débiles" de las ecuaciones.

Varios autores, como Carlesson, Ehrenpreis o Komatsu habían investigado condiciones para extender el teorema de Borel al contexto de las funciones ultradiferenciables. Yo comencé a trabajar con Meise en temas relacionados en 1986. Una versión satisfactoria del teorema de extensión de Whitney, que extendía un resultado anterior de Bruna, fue obtenido en 1991 en el trabajo conjunto con Braun, Meise y Taylor.

La existencia de un operador de extensión lineal y continuo para funciones no casi analíticas fue considerado en primer lugar por Meise y Taylor en la mitad de los años 1980 y continuado por Petzsche y por Langenbruch en

1988. En toda esa vasta literatura, la componente real analítica del teorema de Whitney no fue considerada hasta que Valdivia demostró un resultado importante en 1996.

Desde los artículos de Björck y de Komatsu varios autores investigaron extensiones de los teoremas de Malgrange, Ehrenpreis y Hörmander al contexto de operadores de convolución en ultradistribuciones. Deben mencionarse, entre otros a Berenstein, Dostal y Cioranescu.

En 1996, Galbis, Meise y yo presentamos en un estudio completo de la sobreyectividad de operadores de convolución en estos espacios. Por otra parte, en 2000 mostré que todo operador de convolución que no sea un múltiplo escalar de la identidad cumple la siguiente condición, aunque no sea sobreyectivo: existe un elemento cuya órbita por el operador es densa en el dominio y, además, el conjunto de puntos periódicos del operador es también denso en el dominio; en otras palabras, el operador es caótico en el sentido de Devaney. Mi antiguo alumno Alfredo Peris, junto con sus discípulos Félix Martínez y Alberto Conejero, prosiguen con éxito las investigaciones en dinámica de operadores en dimensión infinita desde 1998. Operadores hipoelípticos y elípticos en este contexto han sido investigados por Fernández, Galbis, Carmen Gómez, Jordá, Frerick, Meise, Wengenroth y por mí.

El estudio del problema de la sobreyectividad de operadores en derivadas parciales $P(D)$ en clases de Gevrey fue iniciado en 1981 por Cattabriga El avance más importante, fue dado por Braun, Meise y Vogt en 1990 utilizando métodos de análisis funcional. Han habido muchos progresos posteriores acerca de solubilidad y existencia de operador de solución y los métodos de análisis funcional también juegan un papel importante en estos trabajos. Las investigaciones en estos temas continúan.

8. Despedida y cierre

Ha llegado uno de los momentos más temidos por mí, el de los agradecimientos. Temido por un doble motivo: hay un riesgo real de ponerse sentimental y resultar demasiado emotivo, y existe el peligro aún mayor de olvidar a alguien, lo que resultaría imperdonable. Pero la tarea es insoslayable, así que vayamos a ella. Muchas personas me han ayudado a lo largo de mi carrera, y es imposible mencionarlas a todas aquí. Estoy profundamente agradecido a mis padres, por haber dejado que me dedicara a las matemáticas y haberme dado total libertad en mi educación. Lo estoy a toda mi familia en general, incluyendo a mis dos hermanas Pilar y Victoria. A todos ellos por haber generado un ambiente donde el trabajo y el esfuerzo eran valores supremos e incuestionables. También quiero dar las gracias, con todo mi cariño, a mi mujer Encarna y a mis hijos Marta y Pepe, especialmente por haber insistido a menudo que no debía trabajar tanto y que, aunque a mí a veces me resulte difícil de asumir, hay otras cosas mucho más importantes que las matemáticas.

La carrera de un científico no es sólo fruto de su esfuerzo y su dedicación apasionada, sino que se apoya en todos aquellos que le han ayudado y enseñado. La mayor parte de mis maestros, españoles y extranjeros, han sido mencionados varias veces en este discurso. Estoy profundamente agradecido a todos ellos por haber sido pacientes y por haber confiado en mí. Gracias a mis muchos co-autores, ha sido un placer trabajar con todos ellos; gracias a las autoridades de la Universidad Politécnica de Valencia y en especial de la ETS Arquitectura, que me han apoyado siempre; a los compañeros de la unidad docente, sin cuya ayuda mucho de lo conseguido hubiera sido imposible, y también, claro, a todas las instituciones que nos han financiado generosamente. Finalmente, es un placer mencionar a mis dos amigos matemáticos Manuel Maestre y Domingo García, que aunque no han aparecido en mi exposición, han jugado un papel fundamental en mi vida profesional y personal.

Escribía Don Santiago Ramón y Cajal en su libro “Los Tónicos de la Voluntad”, que leí hacia 1980 y me fue de gran ayuda, que

> *la más pura gloria del maestro consiste, no en formar discípulos que le sigan, sino en formar sabios que lo superen,*

y que

> *dejar prole espiritual, además de dar alto valor a la vida del sabio, constituye utilidad social y labor civilizadora.*

No puedo estar más de acuerdo. Por eso, he reservado un agradecimiento especial para todos mis discípulos, todos aquellos que se han formado conmigo y se han convertido en científicos independientes. Sus nombres han ido apareciendo también. Para mí el grupo de investigación es fundamental. Yo no pienso que las matemáticas sean una sucesión de verdades existentes, independientes de nosotros, que descubren los grandes genios. Más bien creo que las matemáticas son una actividad social que forma parte de la cultura humana. El grupo de investigación es el ámbito adecuado para disfrutar la aventura de la ciencia y compartir el sentido del deber profesional y un sentimiento de amistad, de camaradería y de trabajo bien hecho. Lo que yo he querido ser, lo que yo he tratado de conseguir en matemáticas y formando mi propio equipo, es hacerles partícipes de mi gran pasión, de la aventura de la investigación y que disfrutemos en un ambiente de amistad y colaboración. Yo lo he pasado muy bien con todos ellos, he aprendido mucho y espero que nuestro viaje científico continúe muchos años.

Les prometí al principio de esta exposición que trataría de explicarles, y explicarme a mí mismo, cuál es la razón por la que he investigado ciertos temas y no otros. Hemos visto la evolución de algunos temas del análisis matemático y su relación con el análisis funcional desde 1940 hasta nuestros días, hemos repasado temas actuales y hemos incluso planteado problemas abiertos. He intentado mostrarles que es un área activa y atractiva. Sin embargo, me temo que no ha quedado clara la razón por la que yo he trabajado en unos temas y no en otros, por qué unos han cautivado mi interés, y el de muchos matemáticos mejores que yo. Hay muchas razones para hacer matemáticas, tal vez sea por curiosidad, por vanidad, porque no sabemos hacer otra cosa, porque lo necesitamos... Yo siempre he actuado conforme a mis convicciones personales, y he procurado hacer y enseñar aspectos de matemáticas que merezcan el esfuerzo que requiere la investigación, he intentado comprender y estudiar más y mejor. Les he dicho siempre a mis discípulos, y lo repito hoy delante de ustedes, que intenten, como he tratado de hacer yo, trabajar en problemas profundos, que estudien y aprendan con humildad, que hagan teoremas con dificultad técnica, pero no farragosa, que busquen siempre el interés en temas afines y, si es posible, capten la atención de la comunidad matemática y científica, que intenten conectar sus investigaciones con temas clásicos y variados, que expongan con claridad y rigor y, finalmente, que cambien de tema, que sean versátiles y adaptables y, por supuesto, que sean generosos con sus propios discípulos.

Hemos hablado de muchos problemas y de muchas aplicaciones interesantes, pero es un misterio por qué siente uno esa pasión por las matemáticas. Paul McCartney decía en una entrevista, que él continuaba trabajando para sentir la libertad de hacer lo que le gustaba y para vivir sus propios sueños. Yo he tenido la fortuna de que los míos profesionales se hayan realizado. Y aún quiero seguir. Recuerdo un chiste que cuenta Woody Allen en su película Annie Hall: Woody va al psiquiatra y le comenta preocupado “Doctor, mi hermano cree que es una gallina”, a lo que el médico replica: “Enciérrelo en una institución”. “Ya doctor”, le dice Woody, “pero es que necesito los huevos”. Por supuesto, sé que es una locura, pero yo necesito las matemáticas. Por eso, en definitiva, me dedico a ellas.

Muchas gracias por su atención.

Dirección del Autor:

José Bonet Solves
Universidad Politécnica de Valencia,
Instituto de Matemática Pura y Aplicada
IUMPA-UPV,
E-46022 Valencia, Spain
E-mail: jbonet@mat.upv.es