Reordenación de series. El teorema de Levy Steinitz.

por

José Bonet

Resumen. El teorema de Levy-Steinitz es una extensión del teorema clásico de Riemann de reordenación de series de números reales. Este resultado afirma que el conjunto de sumas de las reordenaciones de una serie de vectores en un espacio vectorial real de dimensión finita es o bien vacío o bien el trasladado de un subespacio vectorial. Enunciado de este modo el resultado no es cierto para espacios de Banach de dimensión infinita reales. De hecho el conjunto de sumas puede reducirse a un número finito prefijado de puntos. En este artículo presentamos las ideas de la demostración del teorema original de Levy-Steinitz y discutimos resultados relacionados para espacios de dimensión infinita.

Introducción

El presente artículo constituye una versión expandida de la conferencia plenaria con un título similar que el autor impartió en el Primer Congreso Conjunto de la Real Sociedad Matemática Española y la Sociedad Matemática Mexicana celebrado en Oaxaca en julio de 2009. Variantes de la misma conferencia se han impartido después en varias universidades. El propósito del artículo es revisar algunos aspectos de la convergencia y reordenación de series en espacios de dimensión finita e infinita.

Un fenómeno sorprendente en análisis matemático, que se descubre cuando se empiezan a estudiar las series numéricas es que las sumas infinitas de números reales arbitrarios no cumplen la propiedad conmutativa; o sea, que reordenando los términos de una serie convergente, pero tal que la serie de sus módulos no converja, pueden obtenerse sumas diferentes de la suma de la serie original. Para ser más precisos, vamos a recordar en la sección siguiente los conceptos fundamentales de convergencia de series de números reales.

1. Series de números reales

Una *serie* $\sum a_k$ no es más que una sucesión de números reales $a_1, a_2, ..., a_k, ...$, llamados términos de la serie, a los que pretendemos asociar una *suma*. La idea de Cauchy para hacerlo es la siguiente: Se llaman *sumas parciales* de la serie a los números reales $s_1 := a_1$, $s_2 := a_1 + a_2$,..., $s_k := a_1 + a_2 + ... + a_k$,... Decimos que la *serie converge* si existe $\lim s_k = s$ y al límite se le llama *suma* de la serie $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Por ejemplo, la serie geométrica $\sum x^k = 1 + x + x^2 + ...$ converge si y sólo si $|x| < 1$, y su suma vale $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.

Observe el lector que vamos a denotar por $\sum a_k$ la serie considerada como la sucesión de términos a_k, que más adelante pueden ser vectores, y su suma, si existe, por $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Mantendremos esta distinción a lo largo de todo el artículo. Estos son aspectos que se estudian acerca de las series:

(1) *Convergencia.* Un ejemplo clásico es el siguiente resultado de Euler: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \pi^2/6$. Su demostración se suele obtener como una aplicación de las series de Fourier. Véase, por ejemplo, la página 208 del libro de Duren [9]. En la página 92 y las siguientes del mismo texto se incluyen pruebas directas.

(2) *Comportamiento asintótico.* Por ejemplo, la serie armónica $\sum \frac{1}{k}$ diverge (como probó también Euler). Sus sumas parciales s_k se comportan asintóticamente como $\log k$. O sea, $\lim_{k\to\infty} \frac{s_k}{\log k} = 1$.

Estos dos temas se pueden estudiar para sucesiones, sin embargo, el siguiente constituye un aspecto exclusivo de las series.

(3) *Reordenación* de series.

Una *reordenación* de la serie $\sum a_k$ es la serie $\sum a_{\pi(k)}$, donde $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una biyección de los números naturales $\mathbb{N}$. Decimos que una serie $\sum a_k$ es *incondicionalmente convergente* si la serie $\sum a_{\pi(k)}$ converge para cada biyección π. Una serie $\sum a_k$ se llama *absolutamente convergente* si la serie $\sum |a_k|$ converge. En el caso que la serie $\sum a_k$ converja, se llama el *conjunto de sumas* a

$$S(\sum a_k) := \{x \in \mathbb{R} \mid x = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)} \text{ para cierta biyección } \pi\},$$

que es el conjunto de sumas de todas las posibles reordenaciones de la serie. Este concepto juega un papel central en nuestro artículo.

Hacia 1853 Riemann obtuvo la descripción del conjunto de sumas de una serie convergente de números reales. Dirichlet había demostrado en 1837 que la suma de una serie absolutamente convergente no varía al reordenarla y había encontrado series cuya suma cambiaba con la reordenación. Este fenómeno fue completamente explicado con el siguiente teorema

TEOREMA 1.1. *(Riemann, 1853). Sea $\sum a_k$ una serie de números reales.*

(i) $\sum a_k$ *es incondicionalmente convergente si y sólo si* $\sum |a_k|$ *es convergente, o sea, la serie es absolutamente convergente. En ese caso* $S(\sum a_k)$ *se reduce a un punto.*

(ii) Si $\sum a_k$ *converge, pero no incondicionalmente, entonces* $S(\sum a_k) = \mathbb{R}$.

Revisemos la *idea de la demostración:* Si $\sum a_k$ converge absolutamente, el criterio de Cauchy para series asegura que toda reordenación converge a la misma suma. Supongamos ahora que $\sum a_k$ converge, pero no absolutamente. Sean p_k y q_k los términos positivos y negativos de la serie respectivamente. Nos olvidamos de los términos nulos. Se tienen los siguientes casos posibles:

- $\sum p_k$ converge, $\sum q_k$ converge, entonces $\sum |a_k|$ converge.

- $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \infty$, $\sum q_k$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$.
- $\sum p_k$ converge, $\sum_{k=1}^{\infty} q_k = -\infty$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = -\infty$.

Luego necesariamente $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \infty$ y $\sum_{k=1}^{\infty} q_k = -\infty$.

Fijamos $\alpha \in \mathbb{R}$, y elegimos el primer $n(1)$ con $p_1 + ... + p_{n(1)} > \alpha$; ahora el primer $n(2)$ con $p_1 + ... + p_{n(1)} + q_1 + ... + q_{n(2)} < \alpha$. Así sucesivamente. Como la serie converge, $\lim a_k = \lim(s_k - s_{k-1}) = 0$, y el resto de la demostración es ε-δ. De un modo semejante se construye una reordenación que diverge a ∞. Esto completa la demostración de (i) y (ii) en el enunciado. Los detalles pueden consultarse por ejemplo en el libro de Apostol [1].

Vamos ahora a dar ejemplos explícitos de reordenaciones de series con sumas diferentes. La serie armónica alternada es la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{1}{k} = \log 2.$$

El criterio de Leibniz muestra la convergencia de la serie, pero ésta no es absolutamente convergente. Hay muchas pruebas del resultado de la suma mencionada arriba; por ejemplo, como consecuencia del teorema de Abel de series de potencias usando el desarrollo de $\log(1 + x)$; véase la página 76 de [9]. Vamos a proporcionar ahora una prueba elemental, tomada del artículo de Kazarinoff [11]. Ponemos $I_n := \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$. Se cumple:

(1) $(I_n)_n$ es decreciente.

(2) $I_n = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}$, como se ve integrando por partes.

(3) $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$.

(4) Usando inducción en (2) y $I_1 = \frac{1}{2}\log 2$, tenemos

$$\frac{1}{4(n+1)} \leq |I_{2n+1}| = |\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} - \frac{1}{2}\log 2| \leq \frac{1}{4n}.$$

Ahora basta multiplicar por 2 para obtener el resultado.

Una vez establecida esta igualdad, he aquí la reordenación de Laurent:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} ... =$$

$$= (1 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{4} + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6}) - \frac{1}{8} + (\frac{1}{5} - \frac{1}{10}) - \frac{1}{12} ... =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} ... =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...) = \frac{1}{2}\log 2.$$

Para dar más ejemplos introducimos la siguiente definición. Una reordenación de la serie armónica alternada se llama *simple* si los términos positivos y negativos separadamente están en el mismo orden que en la serie original. Por ejemplo la reordenación de Laurent es simple. En una reordenación simple llamamos p_n al número de términos positivos entre los n primeros de la reordenación.

TEOREMA 1.2. *(Pringsheim, 1883). Una reordenación simple $\sum a_{\pi(k)}$ de la serie armónica alternada converge a un número real o a $+\infty$ o $-\infty$ si y sólo si existe el límite* $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n} =: \alpha$.

En ese caso $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\pi(k)} = \log 2 + \frac{1}{2}\log(\alpha(1-\alpha)^{-1})$.

En la reordenación de Laurent se tiene $\alpha = 1/3$ y $\log 2 + \frac{1}{2}\log(\frac{1}{3}\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\log 2$.

Para dar una idea de la demostración del Teorema 1.2, necesitamos recordar la existencia de la constante de Euler $\gamma := \lim_n(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n)$, cuyo valor aproximado es $\gamma = 0{,}577215664$. Parece que sigue sin ser conocido si se trata de un número irracional. Referimos al lector a las páginas 56-59 de [9] para la demostración de la existencia de la constante de Euler.

Idea de la demostración del Teorema 1.2: Denotamos por $\sum b_k$ la serie reordenada y ponemos $q_n := n - p_n$. Como la reordenación es simple,

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{j=1}^{p_n} \frac{1}{2j-1} - \sum_{j=1}^{q_n} \frac{1}{2j}.$$

Ponemos $E_n := \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n$. Con esta notación, se tiene $\sum_{j=1}^{q_n}\frac{1}{2j} = (1/2)\log q_n + (1/2)E_{q_n}$ y

$$\sum_{j=1}^{p_n} \frac{1}{2j-1} = \sum_{j=1}^{2p_n} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{p_n} \frac{1}{2j} = \log 2p_n + E_{2p_n} - (1/2)\log p_n - (1/2)E_{p_n}.$$

Tomando límites,

$$\lim_n \sum_{k=1}^{n} b_k = \lim_n(\log 2 + (1/2)\log(p_n/q_n)) + \gamma - (1/2)\gamma - (1/2)\gamma,$$

de donde se sigue la conclusión.

Otros resultados relacionados pueden verse en [7].

2. REORDENACIÓN DE SERIES DE VECTORES

¿Qué sucede si reordenamos series de vectores en $\mathbb{R}^n$? Comencemos con un ejemplo sencillo en $\mathbb{R}^2$: El conjunto de sumas de la serie $\sum((-1)^{k+1}\frac{1}{k}, 0)$ es $\mathbb{R}\times\{0\}$. No es todo $\mathbb{R}^2$, pero es un subespacio afín de $\mathbb{R}^2$. Este fenómeno fue observado en general por Levy [12] para $n = 2$ (o sea, para números complejos) en 1905 y por Steinitz [18] para $n \geq 3$ en 1913.

Para enunciar el teorema e indicar posteriormente su demostración, hemos de introducir cierta notación. Vamos a escribir E para denotar $\mathbb{R}^m$, pero en las secciones siguientes, consideraremos espacios vectoriales reales E más generales dotados de una topología compatible con las operaciones del espacio vectorial. Por ello damos las definiciones para el espacio E y las usaremos en las secciones posteriores.

Recordamos que el *conjunto de sumas* de una serie convergente $\sum u_k$, $u_k \in E$, es

$$S(\sum u_k) := \{x \in E \mid x = \sum_{k=1}^{\infty} u_{\pi(k)} \ \text{ para cierta biyección } \pi\}.$$

El *conjunto de funcionales de convergencia* de $\sum u_k$, que escribiremos $\Gamma(\sum u_k)$, es el conjunto

$$\Gamma(\sum u_k) := \{x' \in E' \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x'(u_k)| < \infty\}.$$

El dual $E' = (\mathbb{R}^n)'$ de $E = \mathbb{R}^n$ es también $\mathbb{R}^n$ y la dualidad se define mediante $x'(x) = \langle x', x\rangle := \sum_{j=1}^{n} x'_j x_j$. El *anulador* de $G \subset E'$ es $G^{\perp} := \{x \in E \mid \langle x, g\rangle = 0 \ \forall g \in G\}$. El teorema de Levy Steinitz tiene el siguiente enunciado.

Teorema 2.1. *(Levy, Steinitz, 1905, 1913). Si $\sum u_k$ es una serie convergente de vectores de $\mathbb{R}^n$, entonces*

$$S(\sum u_k) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k + \Gamma(\sum u_k)^{\perp}$$

es un subespacio afín de $\mathbb{R}^n$.

La prueba de la inclusión "$\subset$" en el Teorema 2.1 es fácil y se cumple en espacios más generales E. En efecto, sea $x = \sum_{k=1}^{\infty} u_{\pi(k)} \in S(\sum u_k)$. Queremos ver que $x - \sum_{k=1}^{\infty} u_k \in \Gamma(\sum u_k)^{\perp}$. Para ello fijamos $x' \in \Gamma(\sum u_k)$. Por el Teorema 1.1 de Riemann, tenemos

$$\langle x', x - \sum_{k=1}^{\infty} u_k\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\langle x', u_{\pi(k)}\rangle - \sum_{k=1}^{\infty}\langle x', u_k\rangle = 0,$$

porque la serie $\sum\langle x', u_k\rangle$ es absolutamente convergente.

La otra inclusión es difícil. P. Rosenthal, en su artículo [17] en el que explica el teorema, comentaba que es un resultado muy bonito que merece ser más conocido, pero que la dificultad de su prueba es desproporcionada respecto a su enunciado. Nosotros vamos a seguir parcialmente en esta sección la exposición de Rosenthal, pero la estructura de la prueba que indicamos sigue la presentada en la tesina de Blohm [4], que fue dirigida por mi coautor de [5] Andreas Defant.

Llamamos *conjunto de sumas expandido* de $\sum u_k$, y lo denotamos por $S_e(\sum u_k)$, al conjunto

$$S_e(\sum u_k) := \{x \in E \mid \exists \pi \ \exists (j_m)_m \text{ creciente } : x = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{j_m} u_{\pi(k)}\}.$$

Claramente $S(\sum u_k) \subset S_e(\sum u_k)$.

Definimos ahora el conjunto de las sumas parciales de las colas de una serie convergente $\sum u_k$, al que denotaremos por $Z_m(\sum u_k)$, como

$$Z_m(\sum u_k) := \{\sum_{k\in I} u_k \mid I \subset \{m, m+1, \dots\} \text{ es finito}\},$$

donde la suma parcial puede estar indexada por $I = \emptyset$, siendo entonces dicha suma parcial cero (es decir que $0 \in Z_m(\sum u_k)$ para todo $m \in \mathbb{N}$). Claramente $Z_{m+1} \subset Z_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Además denotamos por Q_m a la envoltura convexa de $Z_m(\sum u_k)$, esto es, $Q_m(\sum u_k) := co\{Z_m(\sum u_k)\}$. Ahora, el conjunto $Q(\sum u_k)$, llamado la *envoltura de convergencia* de la serie $\sum u_k$, es

$$Q(\sum u_k) := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{Q_m(\sum u_k)}.$$

Ponemos también

$$\mathcal{A}(\sum u_k) := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{Z_m(\sum u_k)}.$$

Por supuesto se tiene $\mathcal{A}(\sum u_k) \subset Q(\sum u_k)$.

No es muy complicado demostrar que $\mathcal{A}(\sum u_k)$ tiene estructura de grupo aditivo. El primer resultado previo es cierto incluso para series en espacios vectoriales topológicos metrizables. Omitimos su demostración.

LEMA 2.2. *Si la serie $\sum u_k$ converge, entonces*

$$S_e(\sum u_k) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k + \mathcal{A}(\sum u_k).$$

La demostración del siguiente resultado preparatorio depende del teorema de Hahn-Banach de separación de convexos [13]: Sean A y B dos conjuntos convexos disjuntos y no vacíos en un espacio normado real E. Si A es abierto, existe un funcional lineal y continuo $f \in E'$ y existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) < \alpha \leq f(y)$ para cada $x \in A$ y cada $y \in B$. Es importante recordar que la demostración de este resultado cuando E tiene dimensión finita no depende del axioma de elección, como en el caso infinito dimensional.

LEMA 2.3. *Si $\sum u_k$ converge, entonces*

$$Q(\sum u_k) = \Gamma(\sum u_k)^{\perp}.$$

Nosotros no daremos los detalles de las demostraciones de los lemas 2.2 y 2.3. El lector interesado puede consultarlas en [4] o solicitarlas al autor del presente artículo.

Hasta ahora hemos obtenido la siguiente cadena de inclusiones:

$$S(\sum u_k) \subset S_e(\sum u_k) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k + \mathcal{A}(\sum u_k) \subset$$

$$\subset \sum_{k=1}^{\infty} u_k + Q(\sum u_k) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k + \Gamma(\sum u_k)^{\perp}.$$

En este punto conviene enfatizar que todas las inclusiones e igualdades anteriores se cumplen para espacios vectoriales topológicos metrizables, en particular para espacios de Banach. Sin embargo, las dos inclusiones no se pueden transformar en igualdades en general.

Para concluir en el caso de dimensión finita la igualdad entre el primer elemento de la cadena y el último, y así completar la demostración del Teorema 2.1 de Levy Steinitz, debemos comprobar que las dos inclusiones que aparecen arriba son de hecho igualdades. Esto requiere dos lemas fundamentales, que juegan un papel central y que sólo son ciertos para espacios de dimensión finita. Su demostración puede verse en [10] o en el artículo de Rosenthal [17].

La igualdad $S(\sum u_k) = S_e(\sum u_k)$ necesita el siguiente lema, llamado lema de reordenamiento.

Lema 2.4. *(Lema de reordenamiento). Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ un conjunto finito de vectores en un espacio normado E de dimensión m. Existe una biyección σ de $\{1, 2, ..., n\}$ tal que*

$$\left\| \sum_{j=1}^{r} x_{\sigma(j)} - \frac{r-m}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right\| \leq m \max_{j=1,...n} ||x_j||$$

para todo $r = 1, 2, ...n$.

Una consecuencia de este resultado es el lema del confinamiento poligonal.

Lema 2.5. *(Lema del confinamiento poligonal de Steinitz). Para todo espacio normado real E de dimensión finita m existe una constante $0 < C(E) \leq m$ tal que para todo conjunto finito de vectores $x_1, x_2, ..., x_n$ que cumple $\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$, existe una biyección σ de $\{1, 2, ..., n\}$ tal que*

$$\left\| \sum_{j=1}^{r} x_{\sigma(j)} \right\| \leq C(E) \max_{j=1,...n} ||x_j||$$

para todo $r = 1, 2, ...n$.

El valor de la constante $C(E)$ es desconocido incluso para los espacios de Hilbert de dimensión finita $m > 2$. Para $m = 2$, $C(E) = \frac{\sqrt{5}}{2}$, con $E = \mathbb{R}^2$ dotado de la norma euclídea.

Proposición 2.6. *Si $\sum u_k$ es una serie convergente en el espacio normado real E de dimensión finita m, entonces*

$$S(\sum u_k) = S_e(\sum u_k).$$

Demostración. Sea $x \in S_e(\sum u_k)$. Existe una biyección σ y existe una sucesión $(j_n)_n$ creciente de naturales tal que

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{j_n} u_{\sigma(k)}.$$

Ponemos $j_0 = 0$. Sea ahora

$$\delta_n := \max\left\{ \max\{\|u_{\sigma(k)}\| \mid j_{n-1} \leq k \leq j_n\}, \left\| \sum_{k=j_{n-1}+1}^{j_n} u_{\sigma(k)} \right\| \right\}.$$

Como la serie es convergente, δ_n tiende a cero. Por el Lema 2.4 de reordenamiento, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe una permutación σ_n del conjunto $\{j_{n-1}+1, ..., j_n\}$ tal que para todo $r \in \mathbb{N}$ si $j_{n-1} < r \leq j_n$ se tiene

$$\left\| \sum_{k=j_{n-1}+1}^{r} u_{\sigma_n(\sigma(k))} \right\| \leq m\delta_n + \left| \frac{r - j_{n-1} - m}{j_n - j_{n-1}} \right| \left\| \sum_{k=j_{n-1}+1}^{j_n} u_{\sigma(k)} \right\| \leq$$

$$\leq m\delta_n + \left| \frac{r - j_{n-1} - m}{j_n - j_{n-1}} \right| \delta_n \leq m\delta_n + (m+1)\delta_n = (2m+1)\delta_n.$$

Ahora, para concluir basta con poner $\rho(k) := \sigma_n(\sigma(k))$ para $j_{n-1} < k \leq j_n$. Si $j_{n-1} < r \leq j_n$, tenemos

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{r} u_{\rho(k)} \right\| \leq \left\| x - \sum_{k=1}^{j_{n-1}} u_{\rho(k)} \right\| + \left\| \sum_{k=j_{n-1}+1}^{r} u_{\rho(k)} \right\| \leq \left\| x - \sum_{k=1}^{j_{n-1}} u_{\rho(k)} \right\| + (2m+1)\delta_n.$$

Como δ_n converge a cero y $x \in S_e(\sum u_k)$ por hipótesis, se tiene $x = \sum_{k=1}^{\infty} u_{\rho(k)}$ y $x \in S(\sum u_k)$ como queríamos demostrar. □

Para demostrar la igualdad $\sum_{k=1}^{\infty} u_k + Q(\sum u_k) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k + \mathcal{A}(\sum u_k)$ necesitamos el siguiente lema de redondeo de coeficientes. Su prueba puede verse en [10] y [17].

LEMA 2.7. *(Lema del redondeo de los coeficientes). Sea E un espacio normado real de dimensión finita m. Sea $x_1, x_2, ..., x_n$ un conjunto finito de vectores tales que $||x_j|| \leq 1$ para todo $j = 1, ..., n$. Para todo $x \in \mathrm{co}(\sum_{k \in I} x_k \mid I \subset \{1, ..., n\})$ existe $J \subset \{1, 2, ..., n\}$ tal que $||x - \sum_{k \in J} x_k|| \leq \frac{m}{2}$.*

PROPOSICIÓN 2.8. *Si $\sum u_k$ es convergente, entonces*

$$Q(\sum u_k) = \mathcal{A}(\sum u_k)$$

DEMOSTRACIÓN. Si $x \in E \setminus \mathcal{A}(\sum u_k)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $x \notin \overline{Z_{n_0}(\sum u_k)}$, lo cual implica que $x \notin \overline{Z_n(\sum u_k)}$ para todo $n \geq n_0$. Entonces podemos encontrar $\varepsilon > 0$ de forma que

$$(x + \varepsilon B_E) \cap Z_n(\sum u_k) = \emptyset$$

para todo $n \geq n_0$. Aquí B_E denota la bola unidad cerrada de E.

Ponemos ahora $\delta := \frac{\varepsilon}{m}$ y elegimos $n \geq n_0$ de forma que $u_k \in \delta B_E$ para todo $k \geq n$. Supongamos ahora, por reducción al absurdo, que existe $z \in (x + \frac{\varepsilon}{2} B_E) \cap Q_n(\sum u_k)$. Aplicamos el Lema 2.7 de redondeo de los coeficientes para obtener que

$$(z + \frac{m\delta}{2} B_E) \cap Z_n(\sum u_k) \neq \emptyset,$$

lo que implica
$$(x + \varepsilon B_E) \cap Z_n(\sum u_k) \neq \emptyset,$$
una contradicción. Por tanto $x \notin \overline{Q_n(\sum u_k)}$, de donde $x \notin Q(\sum u_k)$. □

La proposición anterior completa la demostración del Teorema de Levy Steinitz 2.1, ya que hemos visto que $S(\sum u_k) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k + \Gamma(\sum u_k)^{\perp}$ para toda serie convergente.

Concluimos esta sección mencionando algunos resultados debidos a Nash-Williams y White [14], que fueron obtenidos aplicando la teoría de grafos a la reordenación de series. Para una biyección π en $\mathbb{N}$, Nash-Williams y White definen la *anchura* $w(\pi)$ de π de modo combinatorio con valores en $\mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ y demuestran los siguientes enunciados:

- $w(\pi) = \infty$ si y sólo si existe una serie $\sum a_k$ de números reales tal que $\sum a_{\pi(k)}$ converge a una suma diferente.
- $w(\pi) = 0$ si y sólo si $\sum a_{\pi(k)}$ converge a la suma de $\sum a_k$ cuando $\sum a_{\pi(k)}$ converge.
- $w(\pi) \in \mathbb{N}$ si y sólo si, para una serie convergente $\sum a_k$, $\sum a_{\pi(k)}$ tiene la misma suma o diverge. En este caso, fijado π, determinan el conjunto de los puntos de acumulación de las sucesiones de sumas parciales de series de la forma $\sum a_{\pi(k)}$ con $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 0$.

Además extendieron en [15] sus resultados para series en $\mathbb{R}^m, m \geq 2$,

3. Reordenación de series en espacios de Banach de dimensión infinita

En esta sección vamos a considerar series $\sum u_k$, con u_k elementos de un espacio de Banach E de dimensión infinita, cuya norma denotaremos por $||\cdot||$. Son ejemplos de espacios de Banach los espacios de sucesiones $\ell_p, 1 \leq p \leq \infty$ y c_0, los espacios de funciones integrables $L_p, 1 \leq p \leq \infty$ o el espacio de funciones continuas $C([0, 1])$. Una referencia excelente para espacios de Banach es el libro de Diestel [8]. Muchos de los resultados que vamos a exponer están explicados con detalle en la monografía de M.I. Kadets y V.M. Kadets [10].

El estudio de las series en espacios de dimensión infinita fue iniciado por Orlicz en 1929-1930 y fue retomado más adelante por Banach y su grupo. Estos solían reunirse en el Scottish Café en Lvov (ahora Ucrania). Los problemas que se planteaban eran recogidos en el Scottish Book, que fue salvado y publicado por Ulam después de la segunda guerra mundial. El prólogo del Scottish Book, que fue escrito por Ulam, contiene una referencia histórica. El lector puede estar interesado también en leer el apasionante libro de memorias de Ulam [1] en el que encontrará más detalles.

El *Problema 106* del Scottish Book decía así: ¿Es cierto el resultado análogo al teorema de Levy Steinitz para espacios de Banach de dimensión infinita? El premio era una botella de vino; menor por cierto que el premio, una oca, por resolver el problema de la aproximación de Mazur. Enflo lo resolvió en 1973, dando ejemplos de espacios de Banach separables que no tienen la propiedad de aproximación, y en particular no tienen base de Schauder.

La respuesta negativa al problema 106 fue obtenida por Marcinkiewicz con el siguiente ejemplo en el espacio de Hilbert $L_2[0,1]$ de las funciones de cuadrado integrable.

Consideramos las siguientes funciones en $L_2[0,1]$:

$$x_{i,k} := \chi_{[\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}]}, \quad y_{i,k} := -x_{i,k}, \ 0 \le i < \infty, 0 \le k < 2^i.$$

Aquí χ_A es la función característica de A. Claramente $||x_{i,k}||^2 = 2^{-i}$ para cada i, k. Se tiene

$$(x_{0,0} + y_{0,0}) + (x_{1,0} + y_{1,0}) + (x_{1,1} + y_{1,1}) + (x_{2,0} + y_{2,0}) + ... = 0,$$
$$x_{0,0} + (x_{1,0} + x_{1,1} + y_{0,0}) + (x_{2,0} + x_{2,1} + y_{1,0}) + (x_{2,2} + x_{2,3} + y_{1,1}) + ... = 1.$$

Pero ninguna reordenación de la serie converge a la función constante $1/2$ porque todas las posibles sumas parciales son funciones con valores enteros.

Vamos a recordar algunos resultados acerca de series en espacios de Banach, que clarifican las diferencias entre los casos finito dimensional e infinito dimensional en relación con los temas considerados en nuestro artículo. Una serie $\sum u_k$ en un espacio de Banach E se llama absolutamente convergente si la serie de números no negativos $\sum ||u_k||$ es convergente, y se llama incondicionalmente convergente si la serie $\sum u_{\pi(k)}$ converge para cada biyección π en $\mathbb{N}$. Toda serie absolutamente convergente es incondicionalmente convergente. Todas las reordenaciones de una serie incondicionalmente convergente tienen la misma suma, como se deduce del Teorema 1.1 de Riemann, aplicando el teorema de Hahn-Banach.

Teorema 3.1. *(Dvoretsky, Rogers, 1950). Un espacio de Banach E es de dimensión finita si y sólo si toda serie incondicionalmente convergente es absolutamente convergente.*

Este es un resultado muy importante en la teoría de espacios nucleares de Grothendieck y en la teoría de operadores absolutamente sumantes de Pietsch. El lector interesado en su demostración puede consultarla, por ejemplo, en [8]. Nosotros vamos a comentar un ejemplo para ilustrar el teorema: En el espacio de sucesiones de Hilbert $E = \ell_2$, ponemos $u_k := (0, ..., 0, 1/k, 0, ...)$. La serie $\sum u_k$ no es absolutamente convergente porque $\sum_{k=1}^{\infty} ||u_k|| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$. Pero

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = (1, 1/2, 1/3, ..., 1/k, ...)$$

incondicionalmente en ℓ_2.

Teorema 3.2. *(Mc Arthur, 1954). Todo espacio de Banach E de dimensión infinita contiene una serie cuyo conjunto de sumas es un único punto, pero que no es incondicionalmente convergente.*

Idea de la prueba para $E = \ell_2$. Denotamos por e_i la base canónica. Se tiene

$$e_1 - e_1 + (1/2)e_2 - (1/2)e_2 + (1/2)e_2 - (1/2)e_2 + (1/4)e_3 - ... = 0.$$

Hemos puesto 2^n términos de la forma $2^{-n+1}e_n$ con signos alternados. Si una reordenación converge, debe sumar 0, como se ve mirando cada coordenada. Pero no es incondicionalmente convergente. Si lo fuera, para cada $x' \in E'$, la serie $\sum x'(u_k)$ sería absolutamente convergente por el Teorema 1.1 de Riemann. Pero si escogemos $x' := (1, 1/2, 1/3, ...) \in E'(= \ell_2)$, la suma $\sum_{k=1}^{\infty} |x'(u_k)|$ queda $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n u(2^{-n+1}e_n) = 2\sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty$, porque $x'(e_n) = 1/n$.

Para un espacio de Banach arbitrario se usan sucesiones básicas, que existen en todo espacio de Banach de dimensión infinita [8].

TEOREMA 3.3. *(Kadets, Enflo, 1986-89). Todo espacio de Banach E de dimensión infinita contiene una serie cuyo conjunto de sumas consiste en dos puntos diferentes.*

La demostración puede encontrarse en el Capítulo 3 del libro de M.I. Kadets y V.M. Kadets [10]. El resultado ha sido mejorado recientemente por J.O. Wojtaszczyk [20].

TEOREMA 3.4. *(J.O. Wojtaszczyk, 2005). Todo espacio de Banach E de dimensión infinita contiene una serie cuyo conjunto de sumas es un conjunto finito afínmente independiente arbitrario.*

La consecuencia palpable de estos dos teoremas es que *el teorema de Levy Steinitz falla de modo drástico en espacios de Banach de dimensión infinita.* Sin embargo, existen resultados que aseguran que el conjunto de sumas de algunas series en ciertos espacios de Banach tiene la forma dada por el teorema de Levy Steinitz en dimensión finita. El siguiente teorema de M.I. Kadets fue mejorado más tarde por Chobanyan y Fonf (véase [10, Capítulo 3]).

TEOREMA 3.5. *(Kadets, 1954.) Sean* $1 \leq p < \infty$ *y* $r := \min(2, p)$. *Si una serie* $\sum u_k$ *en* L_p *cumple que* $\sum ||u_k||^r$ *converge, entonces su conjunto de sumas* $S(\sum u_k)$ *tiene la forma del Teorema 2.1 de Levy Steinitz y, en particular, es un subespacio afín.*

He aquí otros resultados relacionados con los temas considerados en esta sección.

TEOREMA 3.6. *Todo espacio de Banach separable contiene una serie cuyo conjunto de sumas es todo el espacio.*

La prueba no es muy difícil y aparece como ejercicio en la página 31 de [10].

TEOREMA 3.7. *(Ostrovski, 1988). Existe una serie en* $L_2([0, 1] \times [0, 1])$ *cuyo conjunto de sumas no es cerrado.*

El siguiente problema acerca del conjunto de sumas de series en espacios de Banach parece permanecer abierto.

Problema abierto (P1). ¿Existe una serie $\sum u_k$ en un espacio de Banach cuyo conjunto de sumas $S(\sum u_k)$ es un subespacio afín no cerrado?

A la vista de todos estos resultados, surge de modo natural la siguiente pregunta: ¿Puede extenderse el teorema de Levy Steinitz para ciertos espacios de dimensión infinita? Este es el tema al que vamos a dedicar la última sección.

4. Reordenación de series en espacios nucleares.

Presentamos en esta sección extensiones del teorema de Levy Steinitz a espacios de dimensión infinita E que no sean espacios de Banach. Un espacio localmente convexo es un espacio vectorial dotado de una topología de Hausdorff para la que la suma y el producto por un escalar son continuos y que admite una base de entornos del origen absolutamente convexos. Esto asegura que se cumple el teorema de Hahn-Banach en el espacio E y, en particular, que su dual topológico E' separa puntos de E. La topología puede ser descrita por una familia de seminormas p definidas en E. Referimos al lector interesado al capítulo 3 del libro de Meise y Vogt [13]. La definición de serie incondicionalmente convergente es la misma que en la sección anterior. Por otra parte, decimos que la serie $\sum u_k$ es absolutamente convergente si la serie numérica $\sum p(u_k)$ es convergente para cada seminorma continua p en E. Un espacio de Fréchet es un espacio localmente convexo metrizable y completo.

Para los propósitos de este artículo, diremos que un espacio localmente convexo E es *nuclear* si toda serie incondicionalmente convergente es absolutamente convergente. Para espacios de Fréchet o (DF) esta definición coincide con la original dada por Grothendieck en su tesis. En general, no es ese el caso. Por el Teorema 3.1 de Dvoretsky Rogers, un espacio de Banach es nuclear si y sólo si es de dimensión finita. Puede consultarse la definición original en el capítulo 28 de [13] y más detalles en [16].

Muchos espacios que aparecen en análisis matemático y, en particular, en la teoría de las distribuciones de Schwartz, son nucleares. Por ejemplo, son nucleares el espacio $H(U)$ de las funciones holomorfas en un abierto U del plano complejo, el espacio $C^\infty(\Omega)$ de las funciones de clase C^∞ en un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$, el espacio S de Schwartz de las funciones de decrecimiento rápido, el espacio S' de las distribuciones atemperadas, el espacio de gérmenes $H(K)$ en un compacto K del plano complejo, el espacio test $\mathcal{D}$ de las distribuciones, el espacio $\mathcal{D}'$ de las distribuciones de Schwartz y el espacio $\mathcal{A}(\Omega)$ de las funciones real analíticas en un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$.

En sus artículos [2] y [3] Banaszczyk demostró la siguiente extensión del teorema de Levy Steinitz para espacios de Fréchet nucleares. Se trata de un resultado muy profundo. Las dos implicaciones son difíciles. Son necesarias extensiones de los lemas de confinamiento y de reordenamiento con operadores de Hilbert-Schmidt, una caracterización de la nuclearidad con números de volumen, el teorema del subespacio cociente de Milman, grupos topológicos, etc.

TEOREMA 4.1. *(Banaszczyk, 1990, 1993). Sea E un espacio de Fréchet. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) E es nuclear.

(2) Para cada serie convergente $\sum u_k$ en E se cumple

$$S(\sum u_k) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k + \Gamma(\sum u_k)^{\perp}.$$

En el trabajo conjunto [5] con Andreas Defant estudiamos en 2000 el conjunto de sumas de series en espacios no metrizables y, en particular, en espacios (DF), como el espacio S' de las distribuciones atemperadas de Schwartz o el espacio de los gérmenes de funciones holomorfas $H(K)$. En lo que sigue, la notación $E = \mathrm{ind}_n E_n$ significa que E es la unión creciente de los espacios de Banach $E_n \subset E_{n+1}$ con inclusiones continuas, y E está dotado de la topología localmente convexa más fina que hace continuas todas las inclusiones $E_n \subset E$.

Teorema 4.2. *(Bonet, Defant, 2000). Sea $\sum u_k$ una serie convergente en el espacio (DF) nuclear $E = \mathrm{ind}_n E_n$ (entonces converge en un espacio de Banach $E_{n(0)}$). Se cumple:*

(a) $S(\sum u_k) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k + \Gamma_{loc}^{\perp}(\sum u_k)$, *donde*

$$\Gamma_{loc}^{\perp}(\sum u_k) :=$$

$$\bigcup_{n \geq n(0)} \{x \in E_n \mid \langle x, x' \rangle = 0 \ \forall x' \in E_n' \text{ con } \sum_{k=1}^{\infty} |\langle u_k, x' \rangle| < \infty\}$$

es un subespacio de E.

(b) Si E no es isomorfo a una suma directa φ de copias de $\mathbb{R}$, entonces existe una serie convergente en E cuyo conjunto de sumas es un subespacio no cerrado.

Teorema 4.3. *(Bonet, Defant. 2000.) Sea $E = \mathrm{ind}_n E_n$ un espacio (DF) completo en el que toda sucesión convergente en E converge en uno de los espacios de Banach E_n. Si se cumple*

$$S(\sum u_k) = \sum_{1}^{\infty} u_k + \Gamma_{loc}^{\perp}(\sum u_k)$$

para toda serie convergente $\sum u_k$ en E, entonces el espacio E es nuclear.

La demostración de estos dos teoremas requiere nuevas mejoras de los lemas de confinamiento y de reordenamiento. Las técnicas de la demostración del Teorema 4.2 pueden usarse para espacios más generales, incluyendo el espacio de las distribuciones $\mathcal{D}'$ o el espacio de las funciones real analíticas $\mathcal{A}(\Omega)$, obteniendo que el conjunto de sumas de una serie convergente es un subespacio afín no necesariamente cerrado. El resultado acerca de espacios no isomorfos a φ requiere teoremas profundos debidos a Bonet, Meise, Taylor (1991) y a Dubinski, Vogt (1985) acerca de la existencia de cocientes de espacios de Fréchet nucleares que no cumplen la propiedad de aproximación acotada y sus duales.

Concluimos el artículo mencionando otros *problemas abiertos.*

(P2) ¿Contiene todo espacio de Fréchet no nuclear una serie $\sum u_k$ cuyo conjunto de sumas consista en dos puntos? Compárese con el Teorema 4.1.

(P3) Mejorar el Teorema 4.3.

(P4) Encontrar espacios concretos E y condiciones en una serie convergente $\sum u_k$ para que su conjunto de sumas $S(\sum u_k)$ tenga la forma del teorema de Levy Steinitz. Chasco y Chobayan [6] tienen resultados en esa dirección. Compárese con el Teorema 3.5.

Agradecimientos: Quiero dar las gracias a todos los compañeros, colaboradores y discípulos que han leído este artículo y han contribuido con correcciones y sugerencias. Por supuesto, también quiero agradecer la ayuda del proyecto del Ministerio MTM2010-15200, sin el cual muchas de nuestras colaboraciones y trabajos serían imposibles.

REFERENCIAS

[1] T.M. APOSTOL, *Análisis matemático. Segunda edición*, Ed. Reverté, Barcelona, 2006.

[2] W. BANASZCZYK, Rearrangement of series in nonnuclear spaces, *Studia Math.* **403** (1990), 187–200.

[3] W. BANASZCZYK, The Steinitz theorem on rearrangement of series for nuclear spaces, *J. Reine Angew. Math.* **107.3** (1993), 213–222.

[4] H. BLOHM, *Umordnung von Reihen in unendlich dimensionalen Räumen*, Diplomarbeit, Oldenburg, 1997.

[5] J. BONET Y A. DEFANT, The Levy-Steinitz rearrangement theorem for duals of metrizable spaces, *Israel J. Math.* **117** (2000), 131–156.

[6] M. J. CHASCO Y S. CHOBANYAN, On rearrangements of series in locally convex spaces, *Michigan Math. J.* **44.3** (1997), 607–617.

[7] C.C. COWEN, K.R. DAVIDSON Y R.P. KAUFMAN, Rearranging the alternating harmonic series, *Amer. Math. Monthly* **87** (1980), no. 10, 817-819.

[8] J. DIESTEL, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer, New York, 1984.

[9] P. DUREN, *Invitation to Classical Analysis*, American Mathematical Society, Providence, 2012.

[10] M. I. KADETS Y V. M. KADETS, *Series in Banach Spaces*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.

[11] D.K. KAZARINOFF, A Simple Derivation of the Leibnitz-Gregory Series for $\pi/4$, *Amer. Math. Monthly* **62** (1955), no. 10, 726–727.

[12] P. LEVY, Sur les séries semi-convergentes, *Nouv. Ann. de Math.* **5** (1905), 506–511.

[13] R. MEISE Y D. VOGT, *Introduction to Functional Analysis*, Clarendon Press, Oxford, 1997.

[14] C. ST. J. A. NASH-WILLIAMS Y D.J. WHITE, An application of network flows to rearrangement of series, *J. London Math. Soc.* **59** (1999), 637-646.

[15] C. ST. J. A. NASH-WILLIAMS Y D.J. WHITE, Rearrangement of vector series. I, II., *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **130** (2001), 89-109, 111-134.

[16] A. PIETSCH, *Nuclear Locally Convex Spaces*, Springer, Berlin, 1972.

[17] P. ROSENTHAL, The remarkable theorem of Lévy and Steinitz, *Amer. Math. Monthly* **94.4** (1987), 342–351.

[18] E. STEINITZ, Bedingt kovergente Reihen und konvexe Systeme, *J. reine angew. Math* **143** (1913), 128–175; **144** (1914), 1–40; **146** (1916), 1–52.

[19] S.M. Ulam, *Aventuras de un Matemático: Memorias de Stalislaw M. Ulam*, Nivola Ediciones, Barcelona, 2002.

[20] J.O. Wojtaszczyk, A series whose sum range is an arbitrary finite set, *Studia Math.* **171** (2005), 261-281.

José Bonet, Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada IUMPA, Universitat Politècnica de València, 46071-Valencia, España.

Correo electrónico: `jbonet@mat.upv.es`

Página web: `http://jbonet.webs.upv.es/`